Francisco R. Villatoro y Carmen M. García 30 de Septiembre de 2002

REPASO DE CÁLCULO Y ALGEBRA. NO ENTRA EN EXAMEN.

1. **Sucesiones de Cauchy**. Demuestra que una sucesión de números reales convergente es una sucesión de Cauchy.

2. **Teorema del valor medio**.

3. **Regla de la cadena**.

4. **Teorema del punto fijo**.

5. **Cero de una función**. Sea $u(x)$ una función continua definida en $\mathbb{R}$. Considera la sucesión $\{\xi_j\}$ generada por $\xi_j = \xi_{j-1} - \alpha\, u(\xi_{j-1})$, donde ξ_0 es un dato y α es una constante. Determina condiciones que garanticen que $\{\xi_j\}$ converge a $\xi \in \mathbb{R}$ que satisface $u(\xi) = 0$.

6. **Integración por partes**. Demuestra que si u y v son dos funciones diferenciables para $a \le x \le b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(x)\, v(x)\, dx = u(x_1)\, v(x_1) - u(x_0)\, v(x_0) - \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, v'(x)\, dx.$$

   Ayuda: aplica el Teorema Fundamental del Cálculo al producto $u\, v$.

7. **Acotación de integrales**. Demuestra que si f_1 y f_2 son funciones y $f_1(x) \le f_2(x)$ para todo $a \le x \le b$ y x_0 y x_1 son puntos en $[a, b]$ con $x_0 < x_1$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx \le \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\, dx.$$

   Utiliza este teorema para probar que $|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx| \le \int_{x_0}^{x_1} |f(x)|\, dx$ si $x_0 < x_1$.

8. **Teorema de Taylor**.

9. **Propiedades de la distancia**. Usando los axiomas de la definición de distancia en un espacio topológico X, demuestre las siguientes propiedades

(a) $d(x,y) \geq 0, \qquad \forall x, y \in X,$

(b) $d(x,y) = d(y,x), \qquad \forall x, y \in X.$

10. Defina las normas l_p $1 \leq p \leq \infty$ de un vector $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$ y las normas $L_p(a,b)$ para una función real $f(x)$.

11. Representa el círculo (bola) unidad $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ para las tres normas $\|\cdot\|$, con $p = 1, 2, \infty$.

12. Si $a_1, \ldots, a_d$, son números (pesos) positivos, entonces $(x,y) = \sum_{i=1}^d a_i \, x_i \, y_i$ es un producto escalar (interior) en $\mathbb{R}^d$. Escribe la norma asociada a este producto escalar y la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Demuestra que la norma asociada a un producto escalar cumple la desigualdad triangular ($\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$).

13. **Desigualdad de Schwarz**. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto escalar (complejo). Enuncia y demuestra la desigualdad de Schwarz.

14. **Ley del paralelogramo**. Demuestra que para normas derivadas de un producto escalar

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

15. Demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_{L_2(a,b)} \, \|g\|_{L_2(a,b)},$$

donde la norma $L_2(a,b)$ se define como

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b f(x)\overline{f(x)} \, dx\right)^{1/2},$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y el producto escalar es complejo.

16. **Ortogonalidad e independencia**. Demuestra que un conjunto de vectores ortogonales entre sí son linealmente independientes.

17. Utiliza el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para obtener un sistema ortonormal que genere el mismo subespacio vectorial que los vectores (1,2,3,0), (1,1,-1,1) y (0,1,3,-2) de R^4

18. **Identidad de Parseval**. Enuncia la identidad de Parseval para los coeficientes de Fourier respecto a una base ortonormal en un espacio de Hilbert.

19. Demuestra que $sin(n\,x)$ y $sin(m\,x)$ son ortogonales en $(0, \pi)$ si $n, m = 1, 2, 3, \ldots, n \neq m$.

20. Escribe la serie de Fourier de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \qquad & x \in [0,1], \\ g(x) &= x(1-x), \qquad & x \in [0,1] \end{aligned}$$

    Compara utilizando MATLAB las gráficas de estas funciones con las sumas de los 10 primeros términos de su serie de Fourier.

21. **Identidades de cálculo vectorial**. Demuestra en dos dimensiones (y luego en tres dimensiones) las identidades vectoriales

    (a) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,u = \nabla \cdot \nabla \times u = 0$, donde u es una función vectorial,

    (b) y, $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u = \nabla \times \nabla u = 0$, donde u es una función escalar.

22. **Coordenadas cilíndricas**. A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas cilíndricas.

23. **Coordenadas esféricas**. A partir de la expresión general de los operadores vectoriales gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, escribe su expresión en coordenadas esféricas.

24. **Teorema de Taylor en dimensión 2**

25. Escribe el desarrollo de Taylor de la función u(x,y)=cos(x+y) hasta los términos de segundo orden y la expresión del error de Taylor.

26. Demuestra que la definición de rotacional para $u : R^3 \to R^3$ en los casos $u = (u_1, u_2, 0)$ y $u = (0, 0, u_3)$ en los que u_1, u_2, u_3 no dependen de x_3 se reduce a las definiciones de rotacional para $u : R^2 \to R^2$ y $u : R^2 \to R$ respectivamente.

27. Demuestra que la derivada direccional de una función $u : R^3 \to R$ en un punto P se maximiza en el vector unitario en la dirección del gradiente

$$e = \frac{\operatorname{grad} u(P)}{\|\operatorname{grad} u(P)\|}.$$

28. Calcula el gradiente y el laplaciano de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(x),$$

$$g(x,y,z) = e^{x+z} \tan(y^2)$$

29. Calcula el jacobiano, el rotacional y la divergencia de las siguientes funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy \\ x^2 \sin(xy) \end{cases}$$

$$g(x,y,z) = \begin{cases} 2xyz \\ x^2 \sin(xy) \\ z+3 \end{cases}$$

30. **Teorema fundamental del cálculo en dimensión 2**

31. **Teorema de la divergencia de Gauss**

32. **Fórmulas de Green**