Carmen M. García y Francisco R. Villatoro 7 de Octubre de 2002

Ejercicios de repaso de ecuaciones en derivadas parciales parabólicas.

1. Demuestra que la solución del problema de valores iniciales o de Cauchy de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (x,t) \in (-\infty,\infty) \times (0,\infty),$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

se puede escribir como

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} \frac{t^n}{n!}.$$

Además, evalúa dicha serie para $f = \exp(3x)$ y $f = \sin x$. Ayuda: Desarrolla $u(x,t)$ en serie de Taylor en t y utiliza la ecuación en derivadas parciales.

2. Demuestra que la solución de la ecuación de difusión en línea finita con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in (0,l), \quad \forall t > 0,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad u(x,0) = g(x), \quad \forall x \in (0,l),$$

se puede escribir como

$$u(x,t) = \int_0^l g(y)\, G(x,y,a^2 t)\, dy,$$

donde la función de Green G se define como

$$G(x,y,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{l}.$$

Ayuda: determina la solución por separación de variables y luego escribela de la forma mostrada.

3. Resuelve el problema anterior con condiciones de contorno Neumann homogénea en $x = l$ y Dirichlet homogénea en $x = 0$.

4. Determina la solución de la ecuación de difusión bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Ayuda: Utiliza transformada de Fourier para las dos variables espaciales.

5. Resuelva el problema de valores iniciales para la ecuación de difusión unidimensional con condiciones iniciales

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases},$$

   Exprese la solución en términos de la función

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\lambda^2} d\lambda$$

   (Esta función está también definida en MATLAB)

   Además resuelva los problemas mixtos que se obtienen al añadir las siguientes condiciones de contorno:

   (a) condiciones de contorno tipo Dirichlet homógeneas en los puntos $x = -1, 1$

   (b) condiciones de contorno tipo Neumann homógeneas en los puntos $x = -1, 1$

   Dibuje con Matlab las soluciones analíticas obtenidas. Compare las soluciones de los problemas de valores iniciales puros y los problemas mixtos. ¿Existen inconsistencias entre las condiciones iniciales y de contorno? ¿Cómo influyen estas inconsistencias en la solución?