Cuarta relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.

Carmen M. García y Francisco R. Villatoro — 16 de Octubre de 2002

Métodos de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parabólicas.

1. Demuestra que se verifica

$$\sum_{m=1}^{M-1} V_m(Z_{m-1} - Z_m) = \sum_{m=1}^{M-1} Z_m(V_{m+1} - V_m)$$

si $Z_0 = V_M = 0$

$$\sum_{m=1}^{M-1} V_m(Z_{m+1} - Z_m) = \sum_{m=1}^{M-1} Z_{m+1}(V_m - V_{m+1}) - V_1 Z_1$$

si $Z_M = 0$

2. Demuestra que existe una matriz D diagonal tal que DAD^{-1} es una matriz simétrica, siendo A la matriz de tamaño $m \times m$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & ... & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Demuestra que si A es una matriz real tridiagonal verificando $a_{ii} \geq -\sum_{i \neq j} a_{ij}$ con $a_{ii} > 0, a_{ij} \leq 0, i \neq j$, para cualquier $i, j = 1...n$ entonces todos sus autovalores son positivos.

4. Estudia las propiedades de consistencia y estabilidad del método de Dufort-Frankel para la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

con condiciones de contorno tipo Dirichlet homogéneas. Recuerda que dicho método utiliza el siguiente esquema en diferencias finitas:

$$\frac{u_{m\,n+1} - u_{m\,n-1}}{2\Delta t} = \frac{u_{m+1\,n} + u_{m-1\,n}}{\Delta x^2} - \frac{u_{m\,n+1} + u_{m\,n-1}}{\Delta x^2}$$

¿Cómo arrancarías este método?

5. Escribe un método en diferencias finitas para el siguiente problema de valores iniciales o de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

donde a es una constante, y con condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

utilizando un θ-método. Estudia la consistencia y estabilidad del método que propongas.

6. Considera la ecuación parabólica ($\alpha(x) \neq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = -u(1,t) = g(t), \quad t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1).$$

Aplica el método de Crank-Nicolson para resolver este problema. ¿Es un método consistente? Determina el error de truncado.

Estudia la estabilidad de este esquema mediante el método de Von Neuman y el método de la matriz suponiendo $\alpha(x)$ constante.

7. Para la ecuación parabólica autoadjunta

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 4, \quad t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1)$$

se puede usar la ecuación en diferencias finitas

$$\frac{u_{m\,n+1} - u_{m\,n}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta x^2}\delta_x(\alpha_m \delta_x)u_{m\,n}$$

donde $\delta_x f(x_m) = f(x_{m+\frac{1}{2}}) - f(x_{m-\frac{1}{2}})$.

Desarrolla los operadores en diferencias finitas y detalla la expresión resultante. ¿Es un método explícito? Determina los términos del error de truncado.¿Cómo tratarías las condiciones de contorno e iniciales con el mismo orden de consistencia? Estudia la estabilidad del método suponiendo α constante

8. Siguiendo la idea del ejercicio anterior propón un método del tipo de Crank-Nicolson para resolver el mismo problema. Estudia el error de truncado y especifica cómo tratarías las condiciones de contorno. Estudia la estabilidad del método suponiendo α constante.

9. Escribe el método de Crank-Nicolson para la ecuación de difusión bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + u(x,y,t), \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \quad t \in (0,T],$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$
$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0$$

Estudia la convergencia de este método.

10. Propón algún método (o métodos) tipo ADI o LOD para el problema del ejercicio anterior que conservando las propiedades del método analizado en dicho ejercicio reduzca el coste computacional para obtener la solución numérica.