Quinta relación de problemas — Métodos Matemáticos y Técn. Comp.

Carmen M. García y Francisco R. Villatoro — 6 de Noviembre de 2002

Métodos de elementos finitos para ecuaciones diferenciales parabólicas.

1. Construye una base nodal de $P^3([a,b])$ que permita expresar un polinomio de dicho espacio utilizando como coeficientes en dicha base su valor y el de su derivada en los puntos a y b (base nodal de Hermite). A partir de dicha base construye una base del espacio $V_h^{(3)}(a,b)$ de polinomios a trozos continuos y con derivada continua. ¿Cuál es su dimensión? Dibuja las funciones base.

2. Demuestra que la proyección ortogonal de f en $P^n([a,b])$ existe y es única, es decir, existe un único polinomio Pf en $P^n([a,b])$ que verifica

$$(f - Pf, v) = 0, \qquad \forall v \in P^n([a,b])$$

3. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de elementos finitos con polinomios lineales a trozos utilizando una partición equidistribuida con $N+1$ puntos: $x_0 = 0$,$x_1 = h$,...,$x_N = Nh = 1$:

$$-u''(x) = x, \qquad x \in (0,1)$$
$$u(0) = 5, \qquad u(1) = 10$$

   Detalla la formulación variacional, el espacio de búsqueda y el espacio de prueba. Compara la solución obtenida con la solución exacta. Puedes utilizar MATLAB para representar gráficamente las soluciones.

4. Desarrolla un método de elementos finitos con polinomios lineales a trozos para el siguiente problema de valores iniciales o de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au, \qquad x \in (0,1), t \in (0,T]$$
$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,1),$$

   donde a es una constante, y con condiciones de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

   Utiliza un θ-método para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales al que da lugar.

5. Considera la ecuación parabólica ($\alpha(x) \neq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$u(0,t) = -u(1,t) = g, \quad t \in (0,T],$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1).$$

¿Cómo resolverías este problema utilizando un método de elementos finitos?

6. Describe un método de elementos finitos para resolver el siguiente problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,T]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 4, \quad t \in (0,T]$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1)$$

7. Escribe un método de elementos finitos para la ecuación de difusión bi-dimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + u(x,y,t), \qquad (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \quad t \in (0,T],$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)\times(0,1),$$

$$u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(x,1,t) = 1$$

Resuelve el problema utilizando un mallado con 4 triángulos del cuadrado $(0,1)\times(0,1)$ suponiendo $u_0(x,y) = 1 + x(1-x)y(1-y)$.