Carmen M. García y Francisco R. Villatoro

Ecuaciones diferenciales elípticas.

1. Considera el siguiente problema

$$\triangle u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 1, \qquad y \in [0,1]$$
$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \qquad x \in [0,1]$$

Escribe el método de diferencias finitas que resulta al discretizar las derivadas parciales utilizando una fórmula centrada de orden 2 en una malla uniforme con $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$ donde N es un entero mayor que 2. Expresa este método de forma matricial.

2. Considera la misma ecuación diferencial del problema anterior pero con condiciones de contorno de tipo Neumann homogéneas y un método de diferencias finitas análogo al del mismo problema. ¿Cómo tratas las condiciones de contorno?

3. Propón un método en diferencias finitas para resolver el siguiente problema:

$$\triangle u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega = \Big\{(x,y) \in (0,1) \times (0,1) \ / \ 0 < x^2 + y^2 < 1\Big\}$$

$$u(x,y) = x + y, \qquad (x,y) \in \partial\Omega$$

4. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de elementos finitos sobre una triangularización uniforme del cuadrado $(0,1) \times (0,1)$ y funciones continuas lineales a trozos:

$$\triangle u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$u(0,y) = y, \qquad u(1,y) = 1 + y, \qquad y \in [0,1]$$
$$u(x,0) = x, \qquad u(x,1) = 1 + x, \qquad x \in [0,1]$$

Plantea el sistema de ecuaciones para $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$.

5. Propón un método de elementos finitos sobre una triangularización uniforme del cuadrado $(0,1) \times (0,1)$ y funciones continuas lineales a trozos para resolver el siguiente problema:

$$\triangle u(x,y) = 2(x^2 + y^2 - x - y), \qquad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 0, \qquad x \in [0,1]$$

$$u(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 0, \qquad y \in [0,1]$$

Plantea el sistema de ecuaciones para $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{N}$. No es necesario que calcules los valores de las integrales.

6. Propón un método de diferencias finitas que discretice las derivadas utilizando fórmulas centradas de segundo orden para el problema del ejercicio anterior. Detalla el tratamiento de las condiciones de contorno.