Generación de la Masa de las Partículas. II: Bosones de Higgs Escalares

Francisco R. Villatoro
Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación
E. T. S. Ingenieros Industriales, Universidad de Málaga
Plaza El Ejido, s/n, 29013-Málaga

November 1999

1 Introducción

La teoría electrodébil unifica la fuerza electromagnética mediada por el fotón, que no tiene masa, y la fuerza débil mediada por los bosones vectoriales intermedios $\mathrm{W}^{\pm}$ y Z, que sí tienen masa. En esta teoría, se produce una ruptura espontánea de la simetría mediante el mecanismo de Higgs, por el cuál los bosones vectoriales adquieren masa y queda como remanente una partícula con masa, el bosón escalar de Higgs, todavía no encontrado experimentalmente.

En este artículo se estudiará el mecanismo de Higgs para un campo escalar cargado con masa e invariante ante transformaciones de aforo locales de tipo $U(1)$. Este tipo de invarianza introduce de forma natural un campo electromagnético que interactúa con el bosón escalar.

Para estudiar este campo, primero se repasa la formulación covariante o relativista de las ecuaciones de Maxwell. Imponiendo la invarianza de las ecuaciones de campo ante transformaciones de aforo $U(1)$ locales se obtiene un campo electromagnético. Finalmente se aplica el mecanismo de Higgs al campo escalar complejo con interacción cuártica y al electromagnético, obtiéndose que el campo electromagnético adquiere masa, desaparece una de las componentes del campo escalar y la otra permanece con masa, el bosón de Higgs.

2 Vectores polares y axiales

Los vectores $\mathbf{v} \equiv v_i$, $i = 1, 2, 3$, se denominan axiales (vectores) o polares (pseudovectores) en función de si cambian o no de signo cuando se realiza una reflexión espacial, $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. La importancia de los vectores axiales se debe a que el producto vectorial de dos vectores polares $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector axial.

Introduciendo el tensor completamente anti-simétrico de rango 3 de Levi-Civita ε_{ijk} definido como

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{321} = -1,$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0, \quad \text{en otro caso,}$$

podemos escribir el producto vectorial $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como $c_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l$, donde se suma respecto a los índices repetidos (en este caso, $\sum_{kl}$).

Asociado al producto vectorial podemos escribir un tensor anti-simétrico de rango 2 de la forma

$$c_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = -c_{ik}$$

que permite escribir

$$c_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} c_{kl}, \qquad c_{ik} = \varepsilon_{ikl} c_l.$$

En concreto, el operador rotacional $\mathbf{C} = \nabla \times \mathbf{c}$ se puede escribir

$$C_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_l} - \frac{\partial c_l}{\partial x_k} \right), \qquad C_{ik} = \varepsilon_{ikl} C_l.$$

En general, todos los vectores axiales $\mathbf{c}$ se pueden representar como tensores anti-simétricos de rango 2 de la forma $c_{ik} = \varepsilon_{ikl} c_l$.

3 Formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en el sistema gaussiano de unidades toman la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \qquad (3)$$

donde $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, ρ, $\mathbf{j}$ y c son el campo eléctrico, la intensidad de campo magnético, la densidad de carga, la corriente de carga y la velocidad de la luz, respectivamente. Las ecuaciones (1) corresponden a la Ley de Faraday, un campo magnético variable genera un campo eléctrico, y a la ausencia de cargas magnéticas (monopolos). Las ecuaciones (2) corresponden a la Ley de Ampère con el término añadido por Maxwell que permite la generación de ondas electromagnéticas y a la ley de Gauss, la carga total en un volumen determina el campo en su superficie. Finalmente, la ecuación (3) es la ley de conservación de la carga.

Las ecuaciones (1) quedan automáticamente satisfechas si se introducen dos potenciales, uno escalar o eléctrico, ϕ, y otro vectorial o magnético, $\mathbf{A}$, de forma que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi,$$

(ya que $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0$ y $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi = \nabla\times\nabla\phi = 0$).

En relatividad especial podemos definir un cuadrivector potencial $A_\mu = (\phi, \mathbf{A}) = (A_0, A_i)$, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$. De esta forma, los campos eléctrico y magnético se escriben

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \nabla\phi = \partial_0 A_i - \partial_i A_0,$$

$$B_i = \varepsilon_{ijk}\delta_j A_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right).$$

Definiendo el tensor covariante antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

obtenemos que, de lo dicho anteriormente,

$$F_{i0} = E_i, \qquad F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k,$$

$$F_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{array}\right).$$

Definiendo un cuadritensor completamente antisimétrico de cuarto rango $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (igual a 1 para permutaciones pares de $\mu\nu\rho\sigma = 0123$, a -1 para permutaciones impares y a cero en otro caso), las ecuaciones (1) se pueden escribir como

$$\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0.$$

Introduciendo un cuadrivector corriente $J_\mu = (\rho, \mathbf{j}/c) = (\rho, j_i/c)$, podemos escribir las ecuaciones (2) como

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu.$$

Además, se cumple automáticamente la ecuación de continuidad $\partial^\mu J_\mu = 0$, ya que

$$\begin{aligned} \partial^\mu\partial^\nu F_{\mu\nu} &= \partial^\mu\partial^\nu\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \\ &= \partial^2\left(\partial^\nu A_\nu - \partial^\mu A_\mu\right) = 0. \end{aligned}$$

A partir del tensor del campo $F_{\mu\nu}$ podemos definir dos invariantes

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \text{inv.},$$

$$\varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = \text{inv.},$$

que indican que la energía se conserva y el campo electromagnético es transversal, respectivamente.

El campo electromagnético es invariante ante transformaciones de aforo (*gauge*) de tipo $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu f$, donde f es una función escalar arbitraria, ya que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no cambian ante dicha transformación.

4 Teoría de aforo del campo escalar complejo

Consideremos un campo escalar complejo con una auto-interacción no lineal,

$$\mathcal{L} = (\partial_\nu\phi)(\partial^\nu\phi^*) - V(\phi^*\phi).$$

cuya lagrangiana $\mathcal{L}$ es invariante ante transformaciones de aforo globales,

$$\phi \longrightarrow e^{-\mathrm{i}\Lambda}\,\phi, \qquad (\Lambda \text{ constate}),$$

es decir, transformaciones de fase o $U(1)$. La invarianza $U(1)$ global indica que podemos seleccionar la fase del campo arbitrariamente y si cambiamos la fase en un punto debemos hacerlo en todos los puntos del espacio. Sin embargo, esto es incompatible con la relatividad especial, ya que implica que una señal (el cambio de fase en un punto) ha de propagarse a una velocidad infinita. Para restaurar la física en este problema debemos considerar cambios de fase locales, es decir, la teoría con invarianza de aforo $U(1)$ local,

$$\phi \longrightarrow e^{-\mathrm{i}\Lambda(x)}\,\phi, \qquad \Lambda(x) = \Lambda(x^\mu).$$

Considerando un cambio infinitesimal $\Lambda \ll 1$,

$$\phi \to \phi + \delta\phi = \phi - \mathrm{i}\Lambda\phi, \qquad \delta\phi = -\mathrm{i}\Lambda\phi,$$

$$\partial_\mu\phi \to \partial_\mu\phi - \mathrm{i}(\partial_\mu\Lambda)\phi - \mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi)),$$

con lo que $\delta(\partial_\mu\phi) \neq -\mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi)$ y $\partial_\mu\phi$ no se transforma covariantemente, es decir, como lo hace ϕ.

Por ello, la lagrangiana no es invariante tampoco

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*)) - \delta V(\phi^*\phi) \\ &= (-\mathrm{i}\Lambda(\partial_\mu\phi) - \mathrm{i}(\partial_\mu\Lambda)\phi)\,(\partial^\mu\phi^*) \\ &\quad + (\partial_\mu\phi)\,(\mathrm{i}\Lambda(\partial^\mu\phi^*) + \mathrm{i}(\partial^\mu\Lambda)\phi^*) \\ &= \partial_\mu\Lambda(-\mathrm{i}\phi\partial^\mu\phi^* + \mathrm{i}\phi^*\partial^\mu\phi) = (\partial_\mu\Lambda)J^\mu,\end{aligned}$$

ya que $\delta(\phi^*\phi) = 0$.

Para restaurar la invarianza de aforo hay que introducir un campo vectorial A_μ (con las mismas unidades que ∂_μ) acoplado a la corriente J^μ, y que se transforme adecuadamente. Debemos añadir

$$\mathcal{L}_1 = -e\,J^\mu A_\mu, \qquad \text{tal que } A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda,$$

con lo que obtenemos el término requerido

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_1 &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - eJ^\mu(\delta A_\mu) \\ &= -e(\delta J^\mu)A_\mu - J^\mu(\partial_\mu\Lambda),\end{aligned}$$

pero a costa de introducir un nuevo término a cancelar

$$\begin{aligned}-eA_\mu(\delta J^\mu) &= -e\mathrm{i}A_\mu\,\delta(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) \\ &= -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi,\end{aligned}$$

lo que nos obliga a introducir otro término

$$\mathcal{L}_2 = e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi,$$

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2e^2A_\mu\delta(A^\mu)\phi^*\phi = 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi.$$

De esta forma $\mathcal{L}+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ es invariante ante transformaciones $U(1)$ locales.

El campo vectorial A_μ también puede interactuar consigo mismo de forma invariante. Definiendo

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu\frac{1}{e}\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda = 0,$$

podemos añadir a la lagrangiana

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},$$

y obtenemr como Lagrangiana total

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T &= (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) - \mathrm{i}e(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*)A_\mu \\ &\quad + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= (D_\mu\phi)(D^\mu\phi^*) - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu},\end{aligned}$$

donde hemos introducido la derivada covariante

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\phi, \qquad D^\mu\phi^* = (\partial^\mu - \mathrm{i}eA^\mu)\phi^*$$

que se transforma como ϕ,

$$\delta(D_\mu\phi) = \delta(\partial_\mu\phi) + \mathrm{i}e(\delta A_\mu)\phi + \mathrm{i}eA_\mu\delta\phi = -\mathrm{i}\Lambda\delta(D_\mu\phi).$$

En la lagrangiana total $\mathcal{L}_T$, ha sido necesario introducir de forma natural un campo electromagnético con objeto de garantizar la invarianza $U(1)$ local de la lagrangiana original.

Las ecuaciones de Maxwell (1) se satisfacen por la construcción de $F_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ

$$\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_T}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right) = 0,$$

conducen a las ecuaciones (2)

$$\begin{aligned}\partial_\nu F^{\mu\nu} &= -\mathrm{i}e(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) + 2e^2A^\mu\phi^*\phi \\ &= -\mathrm{i}e(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*) = -e\mathrm{J}^\mu,\end{aligned}$$

utilizando como vector corriente la versión covariante

$$\mathrm{J}^\mu = \mathrm{i}(\phi^*D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*),$$

que se conserva $\partial_\mu\mathrm{J}^\mu = 0$.

Es importante notar que el campo electromagnético no tiene masa, ya que el término de masa

$$\mathcal{L}_M = M^2A_\mu A^\mu,$$

no es invariante ante transformaciones $U(1)$. Por ello, los partículas del campo electromagnético, los fotones, han de viajar a la velocidad de la luz.

Finalmente, debemos notar que e, la constante de acoplamiento entre el campo electromagnético A_μ y el campo escalar ϕ, juega un papel doble. Por un lado, es la carga eléctrica, una cantidad que se conserva $e = \int \mathrm{J}^0\,dV$, y por otro lado, mide la fuerza con la que la partícula ϕ interactúa con el campo electromagnético A_μ.

5 Bosón de Higgs

Eligiendo un potencial de autointeracción de la forma

$$V(\phi^*\phi) = m^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2,$$

como vimos en la Parte I, el estado de mínima energía para este campo se determina minimizando el potencial V y para $m^2 < 0$ se produce una ruptura espontánea de la simetría, siendo el nuevo vacío

$$|\phi| = a = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}}.$$

Introduciendo dos campos físicos ρ y θ de la forma

$$\phi = a + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \mathrm{i}\phi_2) = (a+\rho)e^{\mathrm{i}\theta},$$

obtenemos fácilmente como nueva Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+e^2a^2A_\mu A^\mu+(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho)-\mathrm{i}ea(A^\mu\partial_\mu\rho-A_\mu\partial^\mu\rho)-m^2a^2-2m^2a\rho-m^2\rho^2-\lambda a^4-4\lambda a^3\rho-6\lambda a^2\rho^2+\text{términos cúbicos}+\text{cuárticos},$$

con lo que el campo vectorial A_μ que representa al fotón ha adquirido masa ”comiéndoseªl bosón escalar θ, el bosón de Goldstone, que no tiene existencia física porque se puede eliminar realizando una transformación $U(1)$ local adecuada, mientras que el bosón escalar ρ, bosón de Higgs, sigue siendo masivo. A partir de dos bosones escalares con masa y un bosón vectorial sin masa hemos obtenido, gracias a la ruptura espontánea de la simetría, un bosón vectorial y un bosón escalar ambos con masa. Este es el mecanismo de Higgs por el que las partículas elementales adquieren masa.

Referencias

[1] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory (2nd. ed.)*, Cambridge University Press (1996).

[2] A.A. Sokolov, I.M. Ternov, V. Ch. Zhukovski y A.V. Borisov, *Electrodinámica Cuántica*, Editorial Mir, Moscú (1989).