Segundo Parcial de Técnicas Numéricas 01 de Junio de 2002

Duración total del examen: 3 horas

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. Determina una aproximación a la derivada de una función $f(x)$ en el punto x_0 utilizando el polinomio interpolador de Newton de grado 2 que coincide con f en los puntos x_0, $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$. ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?

2. Fórmula de integración de Simpson y su error de integración.

3. ¿Qué método de integración gaussiana utilizarías para aproximar el valor de una integral de la forma $\int_a^\infty f(x)dx$? ¿Cómo aplicas dicho método?

4. Enuncia el teorema de equivalencia de Lax. Explica el significado de las propiedades de los métodos a las que hace referencia. NO ES NECESARIA UNA DEFINICIÓN MATEMÁTICA FORMAL.

5. ¿Qué es un método de Adams-Basforth?

6. ¿Cuándo se dice que un método multipaso lineal para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es relativamente estable? ¿Para qué tipo de ecuaciones es útil este concepto de estabilidad?

7. ¿En qué consiste un método de diferencias finitas para problemas de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias? Explica cómo tratar los distintos tipos de condiciones de contorno.

8. ¿Qué son los autovalores de una matriz? ¿Qué es el método de la potencia inversa? ¿Qué propiedades deben tener los autovalores para que este método sea útil en la práctica?

OBSERVACIONES:

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos

PROBLEMAS (2 horas 20 minutos)

1. Deduzca un método de resolución numérica del problema de valores iniciales
$$y' = f(t, y), \qquad t \in (t_0, t_f], \qquad y(t_0) = y_0$$
integrando numéricamente dicha ecuación en el intervalo (t_{n-1}, t_{n+1}) mediante el método (o la regla) del trapecio. (0.5)

    (a) Determine el orden de consistencia y el error de truncado de dicho método. (1)

    (b) ¿Es un método convergente para problemas bien planteados? (0.25)

    (c) Estudie la estabilidad lineal de dicho método. (1)

    (d) Describa como utilizaría el método para resolver el problema planteado. (0.25)

2. Aplique el método de elementos finitos basado en polinomios a trozos lineales continuas para resolver el problema de condiciones de contorno
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a\, y_1(t) + b\, y_2(t) + \int_\alpha^t f(s)\, ds, \\ y_2'(t) &= c\, y_1(t) + d\, y_2(t) + \int_t^\beta g(s)\, ds, \\ y_1(\alpha) &= \gamma_1, \qquad y_2(\beta) = \gamma_2. \end{aligned}$$
Para ello, desarrolle las siguientes etapas:

    (a) Deduzca una ecuación lineal de segundo orden para $y_2(t)$ y sus condiciones de contorno[1]. (0.5)

    (b) Escriba la formulación variacional (o débil) continua de dicha ecuación. (0.6)

    (c) Describa una malla, el espacio de elementos finitos y una base del mismo. (0.7)

    (d) Escriba las formulaciones variacionales discreta con espacios (0.6) y discreta con bases (0.4). ¿Qué propiedades tiene la matriz del sistema lineal que obtiene? (0.2)

[1]Si no es capaz, para poder realizar el resto del ejercicio, suponga una ecuación diferencial general, $y_2'' + a(t)\, y_2' + b(t)\, y_2 = h(t)$, con condiciones de contorno mixtas Robin-Dirichlet, $a_0\, y_2(\alpha) - b_0\, y_2'(\alpha) = \eta_1$, y $a_1\, y_2(\beta) = \eta_2$.