Examen Final de Técnicas Numéricas COMPLETO
(10/Julio/2002) **Duración total del examen: 3 horas**

TEORÍA

1. En el formato de números flotantes IEEE-754 de doble precisión, ¿cuál es el épsilon de la máquina? ¿Cuál es el error de redondeo máximo cometido al normalizar un número real? ¿Y el error de truncado? (0.5)

2. Sea $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ una matriz de números complejos general. Considere la matriz $B = A\,A^*$ y el sistema lineal $B\,y = b$. ¿Converge Gauss-Seidel para la matriz B? ¿Converge el método de Gauss-Jacobi? Si la matriz A es simétrica, ¿converge Gauss-Seidel para la matriz B? ¿Y Gauss-Jacobi? Si la matriz A es diagonalmente dominante, ¿converge Gauss-Seidel para B? ¿Y Gauss-Jacobi? (1)

3. Escribe el término del error del polinomio de interpolación escrito en forma de Newton (con diferencias divididas). ¿Qué relación tiene dicho término de error con la expresión obtenida para el polinomio de Lagrange? (0.5)

4. Suponga que $f(x)$ es una función periódica en el intervalo $[0, 1]$. Describa su polinomio de interpolación de Fourier en dicho intervalo. Estime utilizando dicho polinomio la derivada $f'(0.5)$. Estime el error cometido en esta aproximación. (0.5)

5. ¿Qué método de integración gaussiana utilizarías para aproximar el valor de una integral de la forma $\int_a^b f(x)dx$? ¿Por qué? ¿Cómo aplicas dicho método? ¿Hay otros métodos posibles? En su caso, menciona cuáles. (0.5)

6. Describe un método numérico general (el más general que se te ocurra, que incluya a todos los multipaso lineales y las Runge-Kutta explícitos). ¿Qué es el residuo? ¿Cómo se determina su orden de consistencia a partir del residuo? (0.5)

7. ¿En qué consiste la factorización QR? (0.5)

PROBLEMAS (6 puntos)

1. Suponga que ha calculado la factorización LU de una matriz A. Es decir, suponga conocidos los valores (a_{ij}), (l_{ij}) y (u_{ij}), con $a_{ij} = \sum_k l_{ik}\,u_{kj}$. Describa en detalle, un algoritmo (método directo) para el cálculo de la inversa de A, es decir, los elementos (a_{ij}^{-1}) tales que $\delta_{ij} = \sum_k a_{ik}\,a_{kj}^{-1} = \sum_k a_{ik}^{-1}\,a_{kj}$. NOTA: describa el algoritmo en pseudo-código; detalle los nombres de las variables que necesita; preste especial atención a los bucles `for`, indicando claramente sus límites, y a los procesos iterativos `while`, indicando claramente sus condiciones de parada. (1 punto)

2. Describa el algoritmo de Bairstow para calcular las raíces de un polinomio de coeficientes complejos

$$p(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j\, z^j, \qquad a_i, z \in \mathbb{C}.$$

¿Cuál es el polinomio de segundo orden por el que se divide $p(x)$? ¿Cuál es el resto de dicha división? ¿Dónde utiliza el método de Bairstow el algoritmo de Newton? Detalle el jacobiano que se requiere en la aplicación del método de Newton. Finalmente, describa el algoritmo de Bairstow de la manera más clara posible. (2 puntos)

3. Se considera el siguiente método para resolver problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$y_{n+1} = \frac{4}{3} y_n - \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} h f_{n+1}, \qquad n = 1, 2, ..., N$$

donde $h = \frac{t_N - t_0}{N}$, $y_n \approx y(t_n)$, $f_n = f(t_n, y_n)$, $t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, ..., N$.

(a) Determina el error de truncado y el orden de consistencia del método (1)

(b) ¿Es un método convergente para problemas bien planteados? Razone la respuesta.(0.25)

(c) Explique con detalle como utilizar el método para resolver un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias. (0.25)

4. Considera el siguiente problema de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p^2\, y = 0,$$

con condiciones de contorno $y(0) = y(L) = 0$.

(a) Describe una malla uniforme del intervalo $[0, L]$. Escribe un método en diferencias finitas con fórmulas centradas de segundo orden para resolver numéricamente el problema anterior en dicha malla. ¿Cómo tratas las condiciones de contorno? ¿Cuál es el problema de autovalores que obtienes? (0.75)

(b) ¿Cómo aplicarías el método de la potencia para determinar el autovalor dominante (de mayor módulo) en nuestro problema? ¿Qué problemas puede tener el método de la potencia y cómo se pueden resolver en este caso? (0.75)