

TEORÍA (4 puntos)

1. ¿Para qué valores de x hay una diferencia cancelativa al evaluar la función $\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$? ¿Cómo la evitarías?
2. Expresión matricial del método de sobrerelajación sucesiva (SOR). ¿En qué condiciones tenemos garantizada su convergencia?
3. Sucesiones de Sturm. Teorema de Sturm.
4. ¿Qué es una spline cúbica?
5. ¿Qué es una fórmula de integración de Romberg? ¿Cómo está relacionada con las fórmulas de integración de Newton-Cotes? ¿Y con el procedimiento de extrapolación de Richardson?
6. Enuncia el teorema de equivalencia de Lax. Explica el significado de las propiedades de los métodos a las que hace referencia. **NO ES NECESARIA UNA DEFINICIÓN MATEMÁTICA FORMAL.**
7. ¿Qué diferencia hay entre estabilidad fuerte y 0-estabilidad? ¿Y entre estabilidad absoluta y estabilidad relativa?
8. ¿Qué es una matriz en forma de Hessenberg? ¿Se puede transformar toda matriz A rectangular a una forma de Hessenberg? ¿Cómo se realiza esta transformación?

PROBLEMAS (6 puntos)

1. Demuestra que una matriz con uno o más elementos negativos en la diagonal principal no puede ser definida positiva. (1.5)
2. Una función f es de clase $D_M(p)$ si es suficientemente diferenciable y satisface que $f(p) = 0$, $f'(p) \neq 0$ y $f''(p) = \dots = f^{(M-1)}(p) = 0$, $f^{(M)}(p) \neq 0$. Demostrar que si f es de clase $D_M(p)$ entonces el método de Newton tiene convergencia de orden M . (1.5)
3. Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = A(f(x_1) + f(0) + f(x_2))$$

- (a) Determinar la constante A y los puntos $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible. ¿Cuál es este grado? (1)
 - (b) ¿Son $x_1, 0, x_2$ los ceros del polinomio de Legendre de grado 3? Razone la respuesta. (0.25)
4. Utiliza la aproximación

$$y'(t_{n-1}) \approx \frac{-y(t_{n+1}) + 4y(t_n) - 3y(t_{n-1}))}{2h}$$

para deducir un método de resolución de problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias y describe con detalle cómo se utilizaría (0.5).

Analiza la estabilidad lineal de dicho método (0.75).

Describe como podrías utilizar este método (0.5) para resolver un problema de contorno de la forma

$$y'' = f(t, y), \quad y(0) = \alpha, y(1) = \beta$$