Examen Final de Técnicas Numéricas. Convocatoria Oficial Junio 2001

Duración total del examen: 3 horas 30 minutos

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. Diferencia entre redondeo y truncado.

2. ¿Qué es una matriz ortogonal? ¿Y una matriz unitaria? Relación entre matrices ortogonales y unitarias.

3. Demuestra que los autovalores de una matriz hermítica son reales.

4. ¿Todas las matrices se pueden expresar como un producto de una matriz triangular superior (U) y una matriz triangular inferior (L)? ¿Se puede resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales determinado con un método de factorización LU sin realizar ninguna modificación? ¿Qué se puede hacer para poder aplicar un método de este tipo a cualquier sistema de ecuaciones lineales determinado?

5. Expresión matricial del método de sobrerrelajación sucesiva (SOR). ¿En qué condiciones tenemos garantizada su convergencia.

6. Método de la regula falsi.

7. Forma del polinomio interpolador de Lagrange. ¿Qué problema resuelve?

8. ¿Qué es una ecuación diferencial autoadjunta? ¿Y un problema de contorno en ecuaciones diferenciales autoadjunto? ¿Por qué son interesantes estos problemas en teoría de aproximación?

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos.
NO se permite uso de apuntes o calculadora (científica o no).

Examen Final de Técnicas Numéricas. Convocatoria Oficial Junio 2001

PROBLEMAS (2 horas 50 minutos)

1. Demuestre que si A y B son matrices no singulares entonces el radio espectral del producto AB coincide con el radio espectral de BA. (1)

2. Considere la matriz de coeficientes reales

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

   a) Determine los valores a, b y c para que esta matriz sea semidefinida positiva. (0.5)

   b) Demuestre que si M es semidefinida positiva entonces tiene una factorización de Choleski ($M = L \cdot L^T$) (0.5)

   c) Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que M admita una factorización de Choleski (0.5)

3. Considere una función de iteración de la forma $F(x) = x + f(x)g(x)$ donde f verifica que existe un punto x^* tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$.

   a) ¿Qué condiciones debes pedir a g para poder asegurar que el método $x_{n+1} = F(x_n)$ para aproximar x^* converge cuadráticamente para valores iniciales apropiados? (0.75)

   b) ¿Y para asegurar la convergencia cúbica? (0.75)

4. Determine los valores de a, b, c y d para que la siguiente función sea un spline cúbico de extremos libres ($f''(0) = f''(2) = 0$) con nodos 0, 1 y 2 (1.5):

$$f(x) = \begin{cases} x - 9x^2 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$