Examen Final de Técnicas Numéricas. Convocatoria Oficial Junio 2001

Duración total del examen: 3 horas 30 minutos

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. ¿Qué es una matriz ortogonal? ¿Y una matriz unitaria? Relación entre matrices ortogonales y unitarias.
2. ¿Todas las matrices se pueden expresar como un producto de una matriz triangular superior (U) y una matriz triangular inferior (L)? ¿Se puede resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales determinado con un método de factorización LU sin realizar ninguna modificación? ¿Qué se puede hacer para poder aplicar un método de este tipo a cualquier sistema de ecuaciones lineales determinado?
3. Forma del polinomio interpolador de Lagrange. ¿Qué problema resuelve?
4. ¿Qué es una ecuación diferencial autoadjunta? ¿Y un problema de contorno en ecuaciones diferenciales autoadjunto? ¿Por qué son interesantes estos problemas en teoría de aproximación?
5. Enuncia el teorema del valor medio para integrales.
6. Cómo aplicaría la técnica de extrapolación al límite o de Richardson a un método Runge-Kutta cuyo error de truncado es $C\,h^2 + D\,h^4$. ¿Cuál es el orden de consistencia del método resultante?
7. Escribe un método de Adams explícito que no sea fuertemente estable.
8. Dibuje (de forma aproximada) las funciones bases del espacio de polinomios a trozos cúbicos continuos y con derivada continua. ¿Cómo se desarrolla una función en dicho espacio?

OBSERVACIONES:
Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.
NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos.
NO se permite uso de apuntes o calculadora (científica o no).

Examen Final de Técnicas Numéricas. Convocatoria Oficial Junio 2001

PROBLEMAS (2 horas 50 minutos)

1. Considere una función de iteración de la forma $F(x) = x + f(x)g(x)$ donde f verifica que existe un punto x^* tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$. ¿Qué condiciones debes pedir a g para poder asegurar que el método $x_{n+1} = F(x_n)$ para aproximar x^* converge cuadráticamente para valores iniciales apropiados? (1.5)

2. Determine los valores de a, b, c y d para que la siguiente función sea un spline cúbico de extremos libres ($f''(0) = f''(2) = 0$) con nodos 0, 1 y 2 (1.5):

$$f(x) = \begin{cases} x + 3x^2 & x \in [0,1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,2] \end{cases}$$

3. Considere el método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 &= f(x_n, y_n), \\ K_2 &= f(x_n + \theta h, y_n + \theta K_1). \end{aligned}$$

   a) Calcule los términos del error de truncado en función de θ. (0.75 puntos)

   b) ¿Cuál es el orden de consistencia de este método en función de θ? ¿Para qué valores de θ el orden es máximo? (0.25)

   c) ¿Este método es convergente? (0.25)

   d) Estudia la estabilidad lineal de este método en función de θ. (0.75)

4. Sea U la matriz de una transformación de Householder.

   a) ¿Cuál es la forma de U y qué propiedades tiene como matriz? (0.15 puntos)

   b) Si $Ux = y$, con x,$y \in \mathbb{R}$, ¿cómo deben ser x e y? (0.15)

   c) Bajo las condiciones anteriores, calcula la transformación de Householder $Ux = y$. (0.3)

   d) Calcula la transformación de Householder U de x en $y = \beta\,(1, 0, \ldots, 0)^\top$. (0.3)

   e) ¿Es posible una diferencia cancelativa en el cálculo anterior? ¿Cómo la evitas? (0.1)