Primer Parcial de Técnicas Numéricas

Duración total del examen: 3 horas 30 minutos

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. ¿Cómo evitarías una posible diferencia cancelativa al evaluar la función $\sqrt{1+x} - \sqrt{x}$?

2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

3. Demuestra que los autovalores de una matriz hermítica son reales.

4. ¿Qué metodos directos para resolver un sistema de ecuaciones lineales se han estudiado en clase? De entre ellos, ¿cuáles se pueden aplicar para resolver cualquier sistema determinado?; y, ¿cuáles sólo se aplican en situaciones especiales (especifica en qué condiciones)?

5. Expresión matricial del método de Gauss-Jacobi. ¿En qué condiciones tenemos garantizada su convergencia?

6. Sucesiones de Sturm. Teorema de Sturm.

7. ¿En qué consiste un problema de aproximación? ¿Qué técnicas de aproximación se han estudiado en la asignatura? ¿Todos los problemas de interpolación son problemas de aproximación? ¿Todos los problemas de aproximación son de interpolación?

8. ¿Es cierta o falsa la siguiente afirmación: dada una función f y los polinomios p_1 y p_2 que son, respectivamente, el polinomio interpolador de Lagrange y el polinomio interpolador de Newton de f en los puntos x_0, x_1 y x_2 existe al menos un punto $x \in \mathbb{R}$ verificando $p_1(x) \neq p_2(x)$? Justifica tu respuesta.

OBSERVACIONES:

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos, excepto en (3).

NO SE PERMITE NI LIBROS, NI APUNTES, NI CALCULADORA

Primer Parcial de Técnicas Numéricas

PROBLEMAS (2 horas 50 minutos)

1. Considera el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
ax + cy &= c, \\
bx + ay &= a.
\end{aligned}
$$

   a) ¿Para qué valores de a, b y c tiene el sistema solución única? ¿Cómo se llama el teorema que lo garantiza? (0.25 puntos)

   b) ¿Para qué valores de a, b y c se puede resolver el sistema utilizando el método de Cholesky? Calcula en esos casos la solución exacta del problema utilizando dicho método. (1)

   c) Determine una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método de Gauss-Seidel en función de a, b y c. ¿Qué condiciones suficientes de convergencia conoce para este método? Escriba las tres primeras iteraciones de dicho método a partir de $x^{(0)} = (0,0)^\top$. ¿Converge el método? (1)

2. Considere el siguiente polinomio $p(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 - 2\,x + 3$.

   a) Utilice el método de sucesiones de Sturm para acotar las raíces reales de este polinomio en intervalos de longitud 1. (0.75)

   b) Escriba la fórmula de la iteración del método de Newton para calcular las raíces de este polinomio. ¿Converge para la estimación inicial $x^{(0)} = 0$? Razone su respuesta. Itere el método de Newton a partir de $x^{(0)} = 0$. ¿Hacia qué raíz converge? Obtenga dicha raíz con al menos 3 dígitos significativos. ¿Con qué precisión ha obtenido dicha raíz? (0.50)

   c) Realice una deflación de la raíz que ha obtenido en el apartado anterior. Aplique el método de Newton y determine un intervalo que garantice la convergencia (a cada raíz, si las hay). ¿Converge el método para $x^{(0)} = 0{,}7$? Obtenga las raíz positiva mayor iterando a partir de 0.7 utilizando aritmética flotante de 3 dígitos significativos con redondeo. Obtenga la última raíz. (0.75 puntos)

3. Determine los tres primeros polinomios de Legendre ortonormalizados (1.0) y utilícelos para calcular el polinomio de grado 2 que mejor aproxima a la función e^{-x} en el intervalo $[0,1]$. (0.75)