Segundo Parcial de Técnicas Numéricas

Duración total del examen: 3 horas y 30 minutos

TEORÍA (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. Método de Euler explícito. Demuestra que es convergente. Estudia su estabilidad lineal.
2. Enuncia el teorema del valor medio para integrales.
3. Cómo aplicaría la técnica de extrapolación al límite o de Richardson a un método Runge-Kutta cuyo error de truncado es $C\,h^2 + D\,h^4$. ¿Cuál es el orden del método resultante?
4. Determine el polinomio de estabilidad del método de Runge-Kutta siguiente

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n), \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})),$$

   ¿Cuántas raíces espurias tiene?

5. ¿Qué es un método de Galerkin?
6. Escribe un método de Adams explícito que no sea fuertemente estable.
7. Dibuje (de forma aproximada) las funciones bases del espacio de polinomios a trozos cúbicos continuos y con derivada continua. ¿Cómo se desarrolla una función en dicho espacio?
8. Determina una fórmula en diferencias finitas centrada para la segunda derivada de cuarto orden de precisión.

OBSERVACIONES:

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

NO demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos

PROBLEMAS (2 horas y 50 minutos)

1. Considere la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

   a) Calcule el valor exacto de dicho integral. (0.25 puntos)

   b) Escriba un método de integración gaussiana con 5 nodos adecuado para dicha integral. (0.25)

   c) ¿Qué polinomios ortogonales necesita conocer para calcular los nodos en dicha fórmula? ¿Cómo los calcularía por ortogonalización de Gram-Schmidt? Ayuda: no es necesario que lo haga explícitamente. (0.25)

   d) Calcule los nodos de la fórmula anterior. Ayuda: utilice la fórmula de recurrencia adecuada de entre las siguientes (0.75)

   - Legendre: $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$
   - Hermite: $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$
   - Laguerre: $L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2L_{n-1}(x) = 0.$
   - Chebyshev: $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$

   e) Escriba el sistema lineal de ecuaciones que cumplen los pesos de la fórmula anterior. (0.5)

2. Considere el método de Runge-Kutta (método diagonalmente implícito de Nørsett)
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 &= f(x_n + h\,\theta, y_n + h\,\theta\,K_1), \\ K_2 &= f(x_n + h\,(1-\theta), y_n + h\,(1-2\theta)\,K_1 + h\,\theta\,K_2). \end{aligned}$$

   a) Calcule los términos del error de truncado en función de θ. Utilice la definición $y_n' = f_n +$ T.E.T. (0.45 puntos)

   b) ¿Cuál es el orden de consistencia de este método en función de θ? ¿Para qué valores de θ el orden es máximo? (0.3)

   c) ¿Este método es convergente? (0.15)

   d) Estudia la estabilidad absoluta de este método en función de θ. (0.45)

   e) Escribe la raíz principal de este método hasta $O\big((h\lambda)^3\big)$ en función de θ. (0.3)

   f) Estudia la estabilidad relativa de este método en función de θ. (0.15)

   g) ¿Qué es el diagrama de estabilidad de un método de Runge-Kutta? ¿Cómo lo dibujarías?. (0.2)

3. Sea U la matriz de una transformación de Householder.

   a) ¿Cuál es la forma de U y qué propiedades tiene como matriz? (0.15 puntos)

   b) Si $Ux = y$, con x,$y \in \mathbb{R}$, ¿cómo deben ser x e y? (0.15)

   c) Bajo las condiciones anteriores, calcula la transformación de Householder $Ux = y$. (0.3)

   d) Calcula la transformación de Householder U de x en $y = \beta\,(1, 0, \ldots, 0)^\top$. (0.3)

   e) ¿Es posible una diferencia cancelativa en el cálculo anterior? ¿Cómo la evitas? (0.15)

   f) Describa el algoritmo de factorización QR paso a paso. (0.3) *g*) Calcula la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(0.45)

h) ¿Cómo se puede usar la factorización QR para calcular los autovalores de una matriz? ¿Y los autovectores? (0.2)