

Segundo Parcial de Técnicas Numéricas

**Duración total del examen: 3 horas**

**TEORÍA** (4 puntos: 0.5 cada apartado, 40 minutos)

1. Determina una aproximación a la derivada de una función  $f(x)$  en el punto  $x_0$  utilizando el polinomio interpolador de Newton de grado 2 que coincide con  $f$  en los puntos  $x_{-1}$ ,  $x_0$  y  $x_1$ . ¿Cuál es el error cometido en la aproximación?
2. ¿Qué es una fórmula de cuadratura gaussiana? ¿Qué error se comete al utilizarla? ¿Para qué polinomios se puede asegurar que una determinada fórmula de cuadratura gaussiana es exacta?
3. ¿Qué propiedades de un método numérico para un problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias puedes analizar utilizando el polinomio característico? Escribe la expresión del polinomio característico para un método general y establece la relación entre éste y las propiedades del método.
4. ¿Qué es un método de Adams-Moulton?
5. Define el concepto de estabilidad absoluta para métodos multipaso lineales para resolver problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias.
6. Enuncia un teorema relativo a la existencia y unicidad de solución para un problema de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias.
7. ¿Qué es un método de disparo (*shooting*)?
8. ¿En qué consiste el método de la potencia? ¿Y el de la potencia inversa?

**OBSERVACIONES:**

Se debe responder a cada pregunta de forma breve y concisa.

**NO** demuestre los resultados, sólo debe enunciarlos

### PROBLEMAS (2 horas 20 minutos)

1. Determina una fórmula para aproximar  $f'(x)$  como una combinación lineal de los valores  $f(x \pm h)$  y  $f(x \pm 2h)$  ( $h > 0$ ). ¿Qué error se comete en la aproximación? (0.75)

2. Considere un método numérico para resolver el problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

de la forma

$$y_{n+1} = y_n + h(a f_{n+1} + b f_n + c f_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

- a) Determina los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que el método tenga el máximo orden de consistencia (0.75)
  - b) ¿Es el método convergente para esos valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? (0.25)
  - c) Estudia la estabilidad absoluta y relativa del método resultante para  $h$  suficientemente pequeño. (0.75)
  - d) ¿Qué tipo de método estamos analizando? (0.25)
  - e) Define con precisión cómo aplicarías el método para resolver el problema de valores iniciales considerado. (0.25)
3. Considere el problema de contorno en ecuaciones diferenciales ordinarias

$$-u'' = 2x, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

- a) Determine su solución exacta (0.25)
- b) Escriba la formulación variacional continua del problema anterior. (0.5)
- c) Escriba el sistema lineal que se obtiene al aplicar el método de elementos finitos en el espacio  $V_h^{(1)}$  de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla fijo  $h$  para su resolución. (0.75)
- d) ¿Cómo cambia la formulación variacional continua si las condiciones de contorno son  $u(0)=3$ ,  $u'(1)=0$ ? (0.75)
- e) Plantea el sistema lineal que se obtiene al aplicar el método de elementos finitos en el espacio  $V_h^{(1)}$  de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla fijo  $h$  para su resolución. (0.75)