Examen de Técnicas Numéricas
Primer Parcial (09/03/2002) **Duración: 3 horas**

TEORÍA (4 puntos en total; tiempo estimado 45 minutos)

1. Describe el formato de un número en el formato IEEE-754 de doble precisión. ¿Cuántos dígitos tiene en total? ¿Cuántos la mantisa? ¿Cuántos el exponente? (0.7)

2. ¿Con qué intervalo y con qué función peso se caracterizan los polinomios ortogonales de Legendre, Laguerre, Hermite y Chebyshev? (0.5)

3. ¿La exponencial $\exp(\mathrm{i}U)$ de una matriz unitaria U es hermítica? ¿La exponencial $\exp(\mathrm{i}H)$de una matriz hermítica H es unitaria? ¿Una matriz hermítica puede ser definida negativa? ¿Una matriz unitaria puede ser definida negativa? Contesta sí y brevemente por qué, o no y un contraejemplo (de 2×2). (0.5)

4. Sea $V_{\mathcal{T}}^{(n)}$ el espacio de polinomios, de grado a lo sumo n, a trozos continuos definidos en la malla $\mathcal{T} \equiv \{x_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, del intervalo $[0, 1]$. ¿Cuántos elementos (dimensión del espacio) tiene una base nodal de $V_{\mathcal{T}}^{(0)}$, $V_{\mathcal{T}}^{(1)}$, $V_{\mathcal{T}}^{(2)}$ y $V_{\mathcal{T}}^{(3)}$? Nota: La respuesta es una función de N en cada caso. (0.6)

5. ¿Converge Gauss-Seidel si lo hace Gauss-Jacobi? ¿Converge Gauss-Jacobi si lo hace Gauss-Seidel? Si la matriz de coeficientes es simétrica, enuncia una condición necesaria y suficiente para la convergencia del método de Gauss-Seidel. ¿Qué pasa en este caso para Gauss-Jacobi? Pon un ejemplo, si lo hay, de una matriz de 2×2 simétrica para la que converja Gauss-Seidel pero no lo haga Gauss-Jacobi. (0.6)

6. Sea A una matriz tridiagonal a bloques (cajas) de $N \times N$ bloques de $M \times M$ cada uno. Estos bloques serán matrices densas. ¿Con qué algoritmo/s podrías invertir un bloque? ¿Cuál es su coste computacional ($O(f(N, M))$)? ¿Y del método de Thomas aplicado a una matriz tridiagonal? ¿Y del método de Thomas para la matriz A anterior? (0.6)

7. En el método del gradiente conjugado para sistemas lineales, se utilizan vectores A-conjugados. ¿Qué propiedades debe tener la matriz A para que dos vectores puedan ser A-conjugados? ¿Qué es la A-ortogonalidad de vectores? ¿Qué relación hay entre la A-conjugación y la A-ortogonalidad? ¿Cuál de los dos conceptos es más general? (0.5)

Examen de Técnicas Numéricas. (09/03/2002)

PROBLEMAS (6 puntos en total; tiempo estimado 2 horas)

1. Considere la aproximación de una función de la que conocemos sus valores nodales $\{(x_i, f(x_i))\}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, mediante esplines cuadráticas (recuerde, polinomios a trozos cuadráticos continuos y con derivada continua). Represente la espline en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ mediante el polinomio cuadrático

$$s_i(x) = a_i\, x^2 + b_i\, x + c_i.$$

Construya el sistema de ecuaciones (lineal) que relaciona los coeficientes de cada trozo $s_i(x)$ de la espline cuadrática. ¿Cuántas condiciones de contorno necesita? Imponga la condición $a_1 = 0$, ¿es esta condición suficiente? ¿Cómo se interpreta esta condición? ¿Qué otras condiciones necesita? ¿Qué propiedades tiene la matriz de coeficientes del sistema lineal que obtiene? (2 puntos)

2. Considere una matriz T tridiagonal simétrica y definida positiva, con diagonal α_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, y elementos no diagonales β_j, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \vdots \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \beta_{N-1} & \alpha_N \end{pmatrix}.$$

Determine la factorización de Cholesky modificada de dicha matriz. $T = L\, D\, L^\top$, donde L es triangular inferior de diagonal unitaria y D una matriz diagonal. (2 puntos)

3. Describa la regla de Horner para evaluar un polinomio, sea

$$p_n(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0.$$

Realice un análisis de propagación de errores hacia adelante suponiendo que los coeficientes tienen un error flotante de representación fijo, $fl(a_i) = a_i(1 + \epsilon)$. (2 puntos)