Examen EXTRAORDINARIO de Técnicas Numéricas (14/12/2002)

Duración total del examen: 4 horas

TEORÍA (4 puntos en total)

1. Sea el problema diferencial $dY/dt = AY$, $Y(0) = Y_0$, donde A es una matriz de $n \times n$ e Y una función vectorial de variable real. ¿Cómo se determina si es un problema *stiff* (rígido)? En dicho caso, ¿el paso de tiempo Δt para un método numérico está restringido por la exactitud del resultado (error deseado) o por la condición de estabilidad? ¿Funcionan igual de bien los métodos explícitos que los implícitos en problemas *stiff*? Razona tus respuestas. (0.5)

2. El número de condición para la evaluación de la suma de n números $\{x_i\}$ se define como

$$\text{cond}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \equiv \kappa\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \Bigg/ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|.$$

Considera la evaluación de la $\exp(x)$ mediante desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$ utilizando 101 términos. ¿Cuál es mayor, el error de truncado o el error de redondeo al evaluar $\exp(100)$ en Matlab? ¿Y para $\exp(-20)$? Justifique correctamente sus respuestas. (0.5)

3. Deduzca el método de Adams-Bashforth de segundo orden y demuestre que tiene realmente dicho orden de consistencia. (0.5)

4. ¿Es linealmente estable el método de Adams-Bashforth de segundo orden para la ecuación $y' = 20\,y$, $y(0) = y_0$, para el paso de tiempo h suficientemente pequeño? Demuestre su respuesta. (0.5)

5. ¿Es linealmente estable el método de Adams-Bashforth de segundo orden para la ecuación $y' = 20\,y$, $y(0) = y_0$, para un paso de tiempo h cualesquiera? Demuestre su respuesta. (0.5)

6. En qué consiste el método de corrección residual de la solución de sistemas lineales. (0.5)

7. Deduzca la fórmula de integración de Simpson para la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. (0.5 puntos)

8. Demuestre que la fórmula de integración de Simpson es de cuarto orden de precisión. (0.5)

Examen EXTRAORDINARIO de Técnicas Numéricas (14/12/2002)

PROBLEMAS

1. Considere la evaluación de la serie de Taylor alrededor de cero de la función exponencial con $(n+1)$ términos (para $n < 1000$). Responda a los siguientes apartados **(total 3 puntos)**. **(a)** Analice la propagación de errores hacia adelante para el error relativo de redondeo cometido al evaluar x^i. (0.6 puntos) **(b)** Analice de la misma forma el error relativo cometido al evaluar $i!$. (0.6 puntos) **(c)** Analice la propagación de errores hacia adelante para el error absoluto cometido al evaluar $\sum_{i=0}^{n} x^i/i!$. (1.2 puntos) **(d)** Acote el error absoluto de truncado cometido al evaluar dicha serie. (0.3 puntos) **(e)** Analice los resultados obtenidos en los últimos apartados. (0.3 puntos)

2. Si se cumple que $a\,b > 0$ se puede transformar una integral de la siguiente forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2}\, f(1/t)\,dt. \tag{1}$$

Considere la evaluación de la integral impropia siguiente (función de distribución de una variable aleatoria distribuida de forma normal)

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-x^2/2}\,dx.$$

Responda a los siguientes apartados **(total 3 puntos)**. **(a)**Transforme la definición de $N(x)$ utilizando la expresión (1) para que se pueda utilizar la fórmula integración de Simpson. Recuerde que x puede ser negativa, nula, o positiva. (0.6 puntos) **(b)** Aplique la fórmula de integración de Simpson compuesta con N puntos a cada una de las integrales que ha obtenido en el apartado anterior. (0.6 puntos) **(c)** ¿Qué fórmula de integración gaussiana puede utilizar para calcular $N(x)$ utilizando la expresión (1)? ¿Cómo se calculan sus nodos de integración? (0.3 puntos) **(d)** ¿Qué fórmula de integración gaussiana puede utilizar para calcular $N(x)$ sin necesidad de utilizar la expresión (1)? ¿Cómo se calculan sus nodos de integración? (0.3 puntos) **(e)** Aplique una fórmula de integración gaussiana con N puntos para calcular $N(x)$. (0.6 puntos) **(f)** ¿Cuál es el inconveniente principal de la integración gaussiana respecto a la fórmula de Simpson? ¿Y cuál su ventaja más importante? (0.6 puntos)