Examen Primer Parcial de Técnicas Numéricas (01/03/2003)

Duración total del examen: 4 horas

TEORÍA (4 puntos en total)

1. Defina la unidad de redondeo. Escriba la fórmula para el error relativo en el cociente de dos números reales. Acote dicho error utilizando la unidad de redondeo. (0.5)

2. ¿Cuál es el número de condición para la evaluación de las raíces de un polinomio? ¿Cómo calcularía numéricamente dicho número de condición? (0.5)

3. Escriba el polinomio interpolador para la función $f(x)$ de la que se conocen sus valores nodales $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f(x_1)$, y $f'(x_1)$. (0.5)

4. ¿Cuál es la fórmula del error de interpolación de Newton basada en diferencias divididas para una función dada por los pares de valores $\{(x_i, f_i)\}$, con $i = 1, 2, \ldots, N$? Puede escribir dicha fórmula utilizando las derivadas de la función $f(x)$, donde $f_i = f(x_i)$. NOTA: Tenga cuidado con el hecho de que $i = 1, 2, \ldots, N$. (0.5)

5. Escriba la formulación matricial del método de sobrerrelajación basado en Gauss-Seidel. Escriba la condición necesaria y suficiente para su convergencia. ¿Converge este método para matrices simétricas? ¿Por qué? NOTA: presente una respuesta concisa, no hay que demostrar nada. (0.5)

6. Dada una solución $\hat{x}$ numérica al problema lineal $A\,x = b$, describa la aplicación de dos iteraciones del método de corrección residual para dicha solución. (0.5)

7. ¿Qué es una reflexión de Householder?. Describa un algoritmo para aplicar dicha reflexión a un vector x y convertirlo en otro y. Indique varias aplicaciones de dicha reflexión que hayan sido estudiadas en la asignatura. (0.5 puntos)

8. ¿Qué es una matriz ortogonal? ¿Cómo son los autovalores de una matriz ortogonal? ¿Qué más puede decir de estos autovalores si la matriz ortogonal también es simétrica?. (0.5)

NO SE PERMITE CALCULADORA, NI APUNTES, NI NINGÚN OTRO MATERIAL.

PROBLEMAS (6 puntos en total)

1. Una matriz cuadrada A se dice que es antisimétrica cuando $A^\top = -A$. **(a) (0.4 puntos)** Calcule $\langle x, A\,x\rangle$ si A es antisimétrica para cualquier x. **(b) (0.4)** Demuestre que los elementos de la diagonal de una matriz antisimétrica son nulos y que su determinante también es nulo cuando la matriz es de orden impar. **(c) (0.4)** Cómo se puede descomponer una matriz A cuadrada en una parte simétrica A_S y otra antisimétrica A_A. Obviamente $\langle x, A\,x\rangle = \langle x, A_S\,x\rangle$. Esto justifica que al estudiar formas cuadráticas nos limitemos a las matrices simétricas. **(d) (0.4)** Ponga un ejemplo de una matriz simétrica A con todos sus elementos $a_{ij} > 0$ y un vector x tal que $\langle x, A\,x\rangle < 0$. **(e) (0.4)** ¿Puede tener una matriz A una inversa por la derecha $A\,A_{ID} = I$, y otra por la izquierda $A_{II}\,A = I$ que no sean iguales entre sí ($A_{ID} \neq A_{II}$) ? ¿Por qué? En su caso, ponga un ejemplo sencillo. **(2 puntos en total)**

2. Considere las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(a) (0.4 puntos) Determine de manera exacta sus autovalores y autovectores. **(b) (0.4)** Partiendo de $x_0 = (1,1)^\top$, determine tres pasos del método de la potencia (hasta x_3 incluido) para la matriz A y estime su autovalor más grande y el correspondiente autovector. ¿Qué error relativo ha cometido en estas dos aproximaciones? **(c) (0.4)** Partiendo de $x_0 = (1,1)^\top$, determine tres pasos del método de la potencia (hasta x_3 incluido) para la matriz B y estime su autovalor más grande y el correspondiente autovector. ¿Qué error relativo ha cometido en estas dos aproximaciones? **(d) (0.4)** Mediante el método de la potencia con desplazamiento partiendo de $x_0 = (1,1)^\top$ y con desplazamiento $\mu = 1$, estime mediante tres pasos un autovalor de la matriz A y su correspondiente autovector. ¿Qué errores relativos ha cometido? **(e) (0.4)** ¿Los autovalores de A y $A^\top$ son iguales? ¿Y los autovectores? Justifique sus respuestas. NOTA: No utilice calculadora. Los cálculos se pueden realizar perfectamente a mano. Tiene tiempo para ello. RECUERDE: Dosifique su tiempo. **(2 puntos en total)**

3. Deduzca el sistema lineal bidiagonal que hay que resolver para calcular los coeficientes de una espline cuadrática que interpole los puntos $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. ¿Qué condiciones de contorno requieren dicho sistema y cómo se interpretan geométricamente? **(2 puntos en total)**