Examen FINAL Primer Parcial — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Junio de 1999

PRIMER PARCIAL: 4 HORAS DE DURACIÓN

1. Dadas $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$. ¿Para qué valores de ξ se satisfacen las siguientes condiciones?

   a) $\int_0^1 f(x)\, dx = f(\xi)$,

   b) $\int_0^1 g(x)\, dx = g(\xi)$,

   c) $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int_0^1 g(x)\, dx$.

2. Sea U una matriz unitaria. Demuestre que

   a) $\|U\, x\|_2^2 = \|x\|_2, \qquad x \in \mathbb{C}^n$,

   b) la distancia entre x e y es la misma que la distancia entre $U\, x$ y $U\, y$,

   c) $\langle U\, x, U\, y\rangle = \langle x, y\rangle, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n$,

   d) los autovalores de U tienen módulo unidad, $|\lambda_U| = 1$.

3. Resuelva el sistema

$$3{,}9\, x_1 + 1{,}6\, x_2 = 5{,}5, \qquad 6{,}8\, x_1 + 2{,}9\, x_2 = 9{,}7,$$

   con aritmética de dos cifras y el método de Crout. Si es posible mejore el resultado utilizando el residuo.

4. Dados

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   resuelva el sistema $A\, x = b$ por el método de Gauss-Jacobi y determine la tasa de convergencia usando las normas ∞ y 1. Haga lo mismo con el método de Gauss-Seidel y deduzca cuál de ellos converge más rápidamente.

5. Calcule los siete ceros de $x^7 - 1 = 0$ utilizando el método de Newton. Para ello, suponga que x es un número complejo $x = a + \mathrm{i}b$, escriba un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, calcule su jacobiano, escriba la iteración del método de Newton en este caso. Determine valores iniciales para cada raíz para los que converja dicho método de Newton. Itere el método hasta obtener las raíces con 3 dígitos significativos.

6. Escriba el polinomio $p(x)$ de grado ≤ 4 tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \qquad p'(x_0) = y'_0, \qquad p'(x_2) = y'_2,$$

donde $x_i = x_0 + i\,h$ e y_i, y'_0, y'_2 son dadas.

PUNTUACIÓN: 1, 1, 2, 2, 2, 2.