Examen FINAL Segundo Parcial | Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro | 29 de Junio de 1999

SEGUNDO PARCIAL: DURACIÓN 4 HORAS

1. Calcule los tres primeros polinomios de Chebyshev mediante ortogonalización de Gram-Schmidt. Ortonormalice dichos polinomios.

2. Utilizando una fórmula Gaussiana de cuatro puntos calcule

   a)
$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx,$$

   b)
$$I_1 = \int_{-1}^{\infty} x^4\, e^{-x^2}\, dx.$$

3. Calcule el error de truncado del método de Adams-Moulton
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9\, f_{n+1} + 19\, f_n - 5\, f_{n-1} + f_{n-2}\right).$$

4. Determine la solución numérica aproximada del problema
$$-u'' = x, \quad x \in (0,1), \qquad u'(0) = u'(1) = 0,$$
mediante el método de elementos finitos en el espacio $V_h^{(1)}$ de los polinomios lineales a trozos continuos con un paso de malla $h = 1/4$. Calcule la solución exacta de dicho problema y compare los dos resultados que ha obtenido.

5. En el método de la potencia escribimos
$$x^{(k)} = A^k\, x^{(0)} = \lambda_1^k\, (u^{(1)} + \epsilon^{(k)}),$$
donde λ_1 es el autovalor de A de mayor módulo, $u^{(1)}$ es su autovector asociado y $\epsilon^{(k)}$ es el vector de errores. Para determinar el autovalor podemos calcular el tamaño de los vectores $x^{(k)}$ mediante un funcional

$\phi(x)$ lineal (por ejemplo, una norma o alguna de las componentes). De esta forma podemos escribir los cocientes

$$r_k = \frac{\phi(x^{(k+1)})}{\phi(x^{(k)})} = \lambda_1 \frac{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k+1)})}{\phi(u^{(1)}) + \phi(\epsilon^{(k)})},$$

que tienden a λ_1 cuando $k \to \infty$. Demuestre que los errores relativos cumplen con

$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_k,$$

donde los números c_k forman una sucesión convergente (y por tanto acotada). Además, demuestre que $r_{k+1} - \lambda_1 = (c + \delta_k)\,(r_k - \lambda_1)$, donde $|c| < 1$ y $\delta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Es decir, demuestre que la iteración r_k converge linealmente a λ_1.

PUNTUACIÓN: 2, 2, 2, 2, 2.