Examen FINAL — Técnicas Computacionales
Profesor Francisco R. Villatoro — 9 de Julio de 1999

3 HORAS DE DURACIÓN

1. Vamos a calcular los siete ceros de $x^7 - 1 = 0$ utilizando el método de Newton. Proceda como sigue:

   a) Calcule los ceros de dicho polinomio de forma exacta.

   b) Suponga que x es un número complejo $x = a + ib$ y escriba un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

   c) Escriba la iteración funcional del método de Newton para dicho sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

   d) Bajo qué condiciones matemáticas (generales) converge el método de Newton para sistemas de ecuaciones.

   e) Para cada una de las siete raíces, determine un valor inicial para la iteración del método de Newton. Aplicando las condiciones del apartado anterior, demuestre que el método de Newton converge para dichas estimaciones iniciales.

   f) Utilizando las siete estimaciones iniciales anteriores, itere el método de Newton hasta obtener las siete raíces con 3 dígitos de precisión.

   g) ¿Cómo comprobaría numéricamente, es decir, a partir de los resultados del apartado anterior, que el método de Newton es de segundo orden? Hágalo para las siete raíces. ¿Qué resultado obtiene?

2. Para el método numérico de Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\,(9\,f_{n+1} + 19\,f_n - 5\,f_{n-1} + f_{n-2})\,,$$

   realice los siguientes apartados:

   a) Utilizando desarrollo en serie de Taylor, determine los términos del error de truncado ($y' = f + T.E.T.$) y el orden de consistencia de dicho método.

b) ¿Bajo qué condiciones matemáticas converge un método de Adams-Moulton cualquiera? ¿Converge el método presentado más arriba?.

c) Escriba el polinomio característico de dicho método numérico.

d) Escriba el desarrollo Taylor de la raíz principal de dicho método hasta cuarto orden en $h\,\lambda$.

e) Realice una deflación del polinomio característico basada en la raíz principal que ha escrito en el problema anterior truncada hasta segundo orden en $h\,\lambda$.

f) Determine el desarrollo Taylor hasta segundo orden en $h\,\lambda$ de las restantes tres raíces del polinomio característico utilizando el siguiente recetario:

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CÚBICAS

$$x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 = 0,$$

Sean

$$q = \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9}, \qquad r = \frac{a_1\,a_2 - 3\,a_0}{6} - \frac{a_2^3}{27},$$

$$s_1 = \left(r + \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3}, \qquad s_2 = \left(r - \sqrt{q^3 + r^2}\right)^{1/3},$$

entonces

$$x_1 = s_1 + s_2 - \frac{a_2}{3}, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

$$x_2 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,(s_1 - s_2),$$

$$x_3 = -\frac{s_1 + s_2}{2} - \frac{a_2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\,(s_1 - s_2),$$

$$x_1+x_2+x_3 = -a_2, \qquad x_1\,x_2+x_1\,x_3+x_2\,x_3 = a_1, \qquad x_1\,x_2\,x_3 = -a_0,$$

$$q^3 + r^2 \begin{cases} > 0 : \text{1 raíz real y 2 raíces complejas} \\ = 0 : \text{3 raíces reales al menos una de ellas doble} \\ < 0 : \text{3 raíces reales simples} \end{cases}$$

g) ¿Puede determinar las condiciones para la estabilidad fuerte, débil, absoluta y relativa para dicho método utilizando los desarrollos en serie Taylor que ha obtenido previamente?. En su caso, proceda a hacerlo.

h) Determine (de la forma que considere oportuna) las condiciones de estabilidad que no haya podido estudiar utilizando el desarrollo de Taylor.

i) Para aplicar dicho método numérico necesita resolver una ecuación no lineal para el siguiente paso de tiempo. Plantee el método de Newton para la resolución de dicha ecuación. ¿Bajo qué condiciones converge dicho método de Newton?

j) Escriba un pseudo-código para la implementación práctica de dicho método numérico.

PUNTUACIÓN: 5, 5.