Examen Primer Parcial | TÉCNICAS NUMÉRICAS, plan nuevo
TÉCNICAS COMPUTACIONALES, plan antiguo

Profesor Francisco R. Villatoro | 27 de Febrero de 1999
DURACIÓN : 5 HORAS | NO SE PERMITEN APUNTES

Muchos problemas de ingeniería se pueden modelar como un problema de valores iniciales de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo, el estudio mediante las leyes de Kirchoff del transitorio de un circuito eléctrico con varias mallas con condensadores, resistencias e inductancias ideales, el comportamiento mecánico de un modelo de la suspensión de un vehículo mediante las leyes de Newton para elementos rígidos, muelles y amortiguadores ideales, etc. En general, estos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales pueden escribirse como ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + A(t)\,x = f(t), \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

donde $x, x_0, f \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Para la resolución de un sistema de este tipo se puede utilizar la fórmula de Duhamel

$$x(t) = \exp(-A\,t)\,u_0 + \int_0^t \exp(-(t-s)\,A)\,f(s)\,ds,$$

donde se ha utilizado la exponencial de la matriz de coeficientes.

1. En el caso particular de que A sea constante y $f = 0$, el problema (1) es autónomo y la resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a calcular la exponencial de una matriz $\exp(-A\,t)$,

$$\exp(-A\,t) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-A\,t)^i}{i!}.$$

Demuestre que los autovalores de la exponencial $\exp(-A\,t)$ son $\exp(-\lambda_i\,t)$ donde λ_i son los autovalores de A. Además demuestre que si B es una matriz semejante a A, las exponenciales respectivas también son semejantes entre sí. De esta forma demuestre que si una matriz es diagonalizable, el cálculo de su exponencial se reduce a calcular la exponencial de sus autovalores.

2. Una condición que garantiza la estabilidad de la solución del problema (1) en el caso autónomo es que los autovalores sean reales negativos o complejos con parte real negativa o nula. En dicho caso el problema del cálculo de la solución mediante la fórmula de Duhamel se reduce al cálculo de la función e^x para $x < 0$. Determine el número de condicionamiento para la evaluación de esta función. Para los valores de x para los que este problema está mal condicionado, cómo evaluaría la exponencial (utilice desarrollo en serie de Taylor).

3. En el ejercicio anterior hemos aproximado la función e^x mediante un desarrollo en serie de Taylor cercano a cero. Otra posibilidad para aproximar esta función es utilizar un desarrollo de Padé, es decir, un cociente de polinomios. Aproxime cerca de $x = 0$, la exponencial por la expresión

$$\frac{\alpha\,x + \beta}{\gamma\,x + \delta}.$$

4. Normalmente la solución del problema diferencial (1) pasa por un transitorio y alcanza finalmente un estado estacionario en el que se cumple la condición $A(t)\,x = f(t)$. Dicho estado estacionario tiene una enorme importancia en muchos problemas en ingeniería. Supongamos que en un problema autónomo concreto hemos obtenido el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 10\,x_1 - x_2 \quad &= 9 \\ -x_1 + 10\,x_2 - 2\,x_3 &= 7 \\ -2\,x_2 + 10\,x_3 &= 6 \qquad . \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones podemos usar un método directo o un método iterativo. Escriba el método iterativo de Gauss-Seidel. ¿Converge dicho método? ¿Es definida positiva la matriz de coeficientes?. Determine las tres primeras iteraciones de dicho método tomando como valores iniciales $x = 0$. Desarrolle un método de relajación basado en Gauss-Seidel. Determine el parámetro de relajación w óptimo (es decir, el de convergencia más rápida). Escriba las 3 primeras iteraciones del método de relajación con la w óptima tomando como valores iniciales $x = 0$.

5. Para la ecuación $x - \tan x = 0$, indique cuántas raíces tiene y acote cada una de estas raíces. Para calcular cualquiera de estas raíces vamos a estudiar la iteración de Picard con relajación
$$x = x + \mu\,(\tan x - x).$$
Determine las condiciones generales bajo las que converge este método. Para la raíz positiva más pequeña determine un intervalo para la condición inicial y otro para el parámetro de relajación en el que quede garantizado que el método converge a dicha raíz.

6. Demuestre que

   a) una matriz B próxima a la unidad ($\|I - B\| < 1$) no es singular,

   b) si A no es singular y B es tal que
   $$\|A^{-1}\| < \frac{1}{\|A - B\|},$$
   entonces B tampoco es singular.

PUNTUACIÓN DE LOS PROBLEMAS: 1, 1.5, 1.5, 2, 2, 2