

Muchos problemas de ingeniería se pueden modelar como un problema de valores iniciales de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, por ejemplo, el estudio mediante las leyes de Kirchoff del transitorio de un circuito eléctrico con varias mallas con condensadores, resistencias e inductancias ideales, el comportamiento mecánico de un modelo de la suspensión de un vehículo mediante las leyes de Newton para elementos rígidos, muelles y amortiguadores ideales, etc. En general, estos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales pueden escribirse como ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + A(t) x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

donde $x, x_0, f \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para la resolución de un sistema de este tipo se puede utilizar la fórmula de Duhamel

$$x(t) = \exp(-At) u_0 + \int_0^t \exp(-(t-s)A) f(s) ds,$$

donde se ha utilizado la exponencial de la matriz de coeficientes.

1. En el caso particular de que A sea constante y $f = 0$, el problema (1) es autónomo y la resolución de este sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a calcular la exponencial de una matriz $\exp(-At)$,

$$\exp(-At) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-At)^i}{i!}.$$

Demuestre que los autovalores de la exponencial $\exp(-At)$ son $\exp(-\lambda_i t)$ donde λ_i son los autovalores de A . Además demuestre que si B es una matriz semejante a A , las exponenciales respectivas también son semejantes entre sí. De esta forma demuestre que si una matriz es diagonalizable, el cálculo de su exponencial se reduce a calcular la exponencial de sus autovalores.

Solución. Sea $A u_i = \lambda_i u_i$. Como $A^m u_i = \lambda_i^m u_i$, entonces

$$e^{-At} u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-At)^m}{m!} u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m \lambda_i^m}{m!} u_i = e^{-\lambda_i t} u_i.$$

Por otro lado, $A = P^{-1} B P$ implica que

$$A^m = (P^{-1} B P)^m = P^{-1} B^m P,$$

entonces

$$\begin{aligned} e^A &= e^{P^{-1} B P} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1} B P)^m}{m!} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(P^{-1} B^m P)}{m!} \\ &= P^{-1} \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) P = P^{-1} e^B P, \end{aligned}$$

es decir, si B es la matriz diagonal semejante a A mediante P , entonces

$$\exp(-A t) = P^{-1} \exp(-B t) P = P^{-1} \exp(-\lambda_i t) P.$$

2. Una condición que garantiza la estabilidad de la solución del problema (1) en el caso autónomo es que los autovalores sean reales negativos o complejos con parte real negativa o nula. En dicho caso el problema del cálculo de la solución mediante la fórmula de Duhamel se reduce al cálculo de la función e^x para $x < 0$. Determine el número de condicionamiento para la evaluación de esta función. Para los valores de x para los que este problema está mal condicionado, cómo evaluaría la exponencial (utilice desarrollo en serie de Taylor).

Solución. Dado que $f(x) = e^x = f'(x)$, su número de condicionamiento es

$$\left| \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)} \frac{x}{\Delta x} \right| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} x \right| = |x|.$$

El número de condicionamiento crece conforme x crece.

Podemos evaluar e^x mediante su desarrollo de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

que es convergente para toda $x \in \mathbb{R}$. Para $x < 0$ tenemos una serie de términos alternados y que para $x \ll 0$ el valor absoluto de cada término crece indefinidamente. Por lo tanto, su evaluación numérica es difícil ya que se trata de una serie de convergencia lenta que requiere el cálculo de un gran número de términos para evaluar e^x con suficiente precisión $\forall x < 0$.

Para calcular el número de términos que tenemos que calcular, definamos la suma parcial de la serie

$$s_n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

El error cometido al aproximar e^x por s_n es

$$e^x - s_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi,$$

donde $0 \leq \xi \leq x$ y hemos aplicado el teorema del valor medio. Por tanto,

$$|e^x - s_n| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

que podemos hacer tan pequeño como deseemos haciendo n suficientemente grande dado que el factorial crece más rápido que cualquier potencia. Para obtener una precisión inferior al epsilon de la máquina habrá que calcular s_n sucesivamente hasta que $s_n = s_{n-1}$.

Sin embargo, es más eficiente computacionalmente aproximar la exponencial de las siguiente forma

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

Para $x < 0$, todos los términos del denominador son positivos (de hecho, la exponencial es una función no negativa). Es mejor calcular la secuencia

$$s_n = \frac{1}{\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{x^i}{i!}},$$

donde hemos usado el convenio habitual $0! = 1$.

3. En el ejercicio anterior hemos aproximado la función e^x mediante un desarrollo en serie de Taylor cercano a cero. Otra posibilidad para aproximar esta función es utilizar un desarrollo de Padé, es decir, un cociente de polinomios. Aproxime cerca de $x = 0$, la exponencial por la expresión

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Solución. Para aproximar e^x cerca de $x = 0$ razonalmente por $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, tenemos que determinar tres constantes libres, por ejemplo, $\frac{ax+b}{x+c}$, por lo que usaremos las tres condiciones

$$f(0) = 1 = \frac{b}{c},$$

$$f'(0) = 1 = \left. \frac{a(x+c) - (ax+b)}{(x+c)^2} \right|_{x=0} = \frac{ac - b}{c^2},$$

$$f''(0) = 1 = \left. \frac{2(b-ac)}{(x+c)^3} \right|_{x=0} = \frac{2(b-ac)}{c^3},$$

y sustituyendo la segunda ecuación en la tercera

$$1 = -\frac{2}{c}, \quad c = -2 = b,$$

$$a = \frac{c^2 + b}{c} = -1,$$

con lo que hemos obtenido la aproximación racional

$$y(x) = \frac{x+2}{2-x}.$$

También podemos obtener el mismo resultado desarrollando en serie de Taylor (si $c \neq 0$)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{c} \frac{ax+b}{1+\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} (ax+b) \left(1 - \frac{x}{c} + \left(\frac{x}{c}\right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{b}{c} + \frac{(ac-b)x}{c^2} + \frac{(b-ac)x^2}{c^3} + \dots, \end{aligned}$$

y con comparando con el desarrollo de la exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

4. Normalmente la solución del problema diferencial (1) pasa por un transitorio y alcanza finalmente un estado estacionario en el que se cumple la condición $A(t)x = f(t)$. Dicho estado estacionario tiene una enorme

importancia en muchos problemas en ingeniería. Supongamos que en un problema autónomo concreto hemos obtenido el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned} .$$

Para resolver este sistema de ecuaciones podemos usar un método directo o un método iterativo. Escriba el método iterativo de Gauss-Seidel. ¿Converge dicho método? ¿Es definida positiva la matriz de coeficientes?. Determine las tres primeras iteraciones de dicho método tomando como valores iniciales $x = 0$. Desarrolle un método de relajación basado en Gauss-Seidel. Determine el parámetro de relajación w óptimo (es decir, el de convergencia más rápida). Escriba las 3 primeras iteraciones del método de relajación con la w óptima tomando como valores iniciales $x = 0$.

Solución. El sistema se puede escribir como $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

El método de Gauss-Seidel se escribe, descomponiendo la matriz $A = L + D + U$, como

$$x^{(k+1)} = (L + D)^{-1} (b - U x^{(k)}).$$

Este método converge porque la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva. Para comprobar que esta matriz es definida positiva podemos calcular sus autovalores

$$|A - \lambda I| = (\lambda - 10)(-\lambda^2 + 20\lambda - 95) = 0,$$

que son

$$\lambda = 10, \quad \lambda = 10 \pm \sqrt{5},$$

que claramente son positivos. También podríamos haber aplicado la regla de los menores principales

$$A_1 = |10| = 10 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 99 > 0,$$

y $A_3 = |A| = 950 > 0$.

Las tres primeras iteraciones del método de Gauss-Seidel son

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 9/10 \\ 79/100 \\ 379/500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,79 \\ 0,758 \end{pmatrix},$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,979 \\ 0,9495 \\ 0,7899 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,99495 \\ 0,957475 \\ 0,791495 \end{pmatrix}.$$

Introduciendo un parámetro de relajación en el método de Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = w(L + D)^{-1}(b - Ux^{(k)}) + (1 - w)x^{(k)},$$

con lo que el error $e^{(k)} = x - x^{(k)}$ sigue la ecuación

$$e^{(k+1)} = ((1 - w)I - w(L + D)^{-1}U)e^{(k)} = Ne^{(k)},$$

y la convergencia del método queda garantizada si la tasa de convergencia es menor que la unidad

$$\rho(N) < 1.$$

Como

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 1/100 & 1/10 & 0 \\ 1/500 & 1/50 & 1/10 \end{pmatrix},$$

$$(L + D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & -1/100 & -1/5 \\ 0 & -1/500 & -1/25 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$N = (1 - w)I - w(L + D)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 - w & w/10 & 0 \\ 0 & 1 - 99w/100 & w/5 \\ 0 & w/500 & 1 - 24w/25 \end{pmatrix},$$

y por tanto su polinomio característico es

$$|N - \lambda I| = (1 - 19w/20 - \lambda)(1 - w - \lambda)^2,$$

y el radio espectral será menor que la unidad si

$$|1 - w| < 1, \quad |1 - 19w/20| < 1,$$

y por tanto $0 < w < 2$ (de la primera desigualdad) garantiza la convergencia del método. Para obtener la convergencia más rápida debemos buscar el valor w^* que minimiza el radio espectral. Dibujando gráficamente el valor del radio espectral obtenemos que

$$\rho(N) = \begin{cases} 1 - 19w/20 & 0 < w \leq w^* \\ w - 1 & w^* \leq w < 2 \end{cases},$$

por lo que el valor óptimo es

$$1 - 19w^*/20 = w^* - 1, \quad w^* = \frac{40}{39} \approx 1,026.$$

Seguidamente vamos a realizar tres iteraciones del método de Gauss-Seidel con relajación con w^* ,

$$\begin{aligned} x_w^{(1)} &= \begin{pmatrix} 12/13 \\ 158/195 \\ 758/975 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,923077 \\ 0,810256 \\ 0,777436 \end{pmatrix}, \\ x_w^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0,982512 \\ 0,957265 \\ 0,791059 \end{pmatrix}, \quad x_w^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,996065 \\ 0,957798 \\ 0,79157 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Al ser el sistema de 3×3 la solución exacta se puede calcular por un método directo dando

$$x = \begin{pmatrix} 0,995789 \\ 0,957895 \\ 0,791579 \end{pmatrix}.$$

Comparando los errores obtenidos

$$\begin{aligned} \|x - x_w^{(3)}\|_\infty &= 0,000276, & \|x - x^{(3)}\|_\infty &= 0,000839, \\ \|x - x_w^{(3)}\|_1 &= 0,000382, & \|x - x^{(3)}\|_1 &= 0,001343, \end{aligned}$$

se observa que el método con relajación tiene una convergencia más rápida (menor error), aunque las diferencias entre los dos métodos son pequeñas debido a que el valor óptimo del parámetro de relajación w^* es muy próximo a la unidad.

5. Para la ecuación $x - \tan x = 0$, indique cuántas raíces tiene y acote cada una de estas raíces. Estudie la iteración de Picard con relajación

$$x = x + \mu (\tan x - x) = g(x),$$

para el cálculo de cualquiera de estas raíces y determine las condiciones bajo las que converge. Para la raíz positiva más pequeña determine un intervalo de condiciones iniciales y de valores para el parámetro de relajación en el que quede garantizado que el método converge.

Solución. La función $f(x) = x - \tan x$, tiene infinitas raíces en los puntos de corte de la recta $y = x$ y la función periódica $y = \tan x$, que tiene asíntotas verticales en $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, por lo que existirá una raíz ξ_k en cada intervalo

$$\xi_k \in I_k = ((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

siendo la más sencilla $x = 0$ (intervalo con $k = -1$), para $k > 0$ las raíces en el intervalo I_k estarán cerca de su extremo derecho, es decir, cerca de $(2k+3)\frac{\pi}{2}$, y para $k < 0$, al contrario, estarán cerca de su extremo izquierdo, es decir, $(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

La iteración de Picard con relajación

$$x = x + \mu (\tan x - x) = g(x), \quad g'(x) = 1 + \mu \tan^2 x,$$

para un intervalo suficientemente pequeño alrededor de la raíz ξ_k podremos tener contractividad y haciendo μ negativo y suficientemente pequeño. Por ejemplo, para la raíz ξ_1 que se encuentra cerca de $3\pi/2 \approx 4,7$, podemos tantear

$$f(4) \approx 2,84, \quad f(4,7) \approx -76,0, \quad f(4,4) \approx 1,30, \quad f(4,5) \approx -0,14,$$

por lo que $\xi_1 \in [4,4, 4,5]$. Para μ negativo cercano a cero y pequeño, la función $g'(x) > 0$ (y decreciente ya que para esos valores $g''(x) = 2\mu \sec^2 x \tan x < 0$) y $g(x)$ es creciente, luego haciendo

$$4,4 < g(4,5) < 4,5, \quad 4,4 < 4,5 + 0,14\mu < 4,5, \quad -0,73 < \mu < 0,$$

$$|g'(4,5)| < 1, \quad -1 < 1 + \mu \tan^2 4,5 < 1, \quad -0,093\mu < 0,$$

con lo que para $-0,093\mu < 0$ la iteración converge para la raíz ξ_1 que está en el intervalo $[4,4, 4,5]$. De igual forma se procedería para obtener un μ suficientemente pequeño para cualquier raíz ξ_k .

6. Demuestre que

- a) una matriz B próxima a la unidad ($\|I - B\| < 1$) no es singular,
- b) si A no es singular y B es tal que

$$\|A^{-1}\| < \frac{1}{\|A - B\|},$$

entonces B tampoco es singular.

Solución.

- a) Si $|A| \neq 0$, $|B| = 0$ entonces

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A - B\|},$$

ya que si $|B| = 0$ existe un vector $x \neq 0$ tal que $Bx = 0$, luego

$$Ax = Ax - Bx = (A - B)x, \quad \|Ax\| \leq \|A - B\| \|x\|,$$

y como $x = A^{-1}Ax$,

$$\|x\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| \|x\|.$$

Como $x \neq 0$, entonces

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A - B\|}.$$

Si ahora escogemos $A = I$, entonces si suponemos que $|B| = 0$,

$$1 \leq \|A - B\|,$$

que contradice la hipótesis $\|I - B\| < 1$, luego $|B| \neq 0$.

- b) De la hipótesis

$$1 > \|A^{-1}\| \|A - B\| \geq \|A^{-1}(A - B)\| = \|I - A^{-1}B\|.$$

Definiendo $C = I - A^{-1}B$,

$$\|C\| < 1, \quad \|C\| \leq \|C\| \|C\| = \|C\|^2 < 1, \quad \|C^n\| \leq \|C\|^n,$$

con lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C^n\| = 0.$$

Por otro lado, aplicando la definición de norma subordinada a los autovectores de A ,

$$\|A\| \geq \rho(A), \quad \|A^n\| \geq \rho(A^n) = \rho^n(A),$$

y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|C^n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n(C) = 0,$$

entonces

$$\rho(C) < 1, \quad |\lambda_C| < 1.$$

Como

$$1 > \|I - A^{-1}B\| = \|I - D\| \geq \rho(I - D) = \max_i |1 - \lambda_{Di}| \geq 0,$$

por lo que los autovalores de D no pueden ser cero (ya que en ese caso el máximo sería la unidad y se violaría la desigualdad de la izquierda). Tampoco pueden ser negativos, por la misma razón. Luego son positivos y

$$|D| = \prod_{i=1}^n \lambda_{Di} \neq 0,$$

y finalmente,

$$D = A^{-1}B, \quad B = AD, \quad |B| = |A||D| \neq 0.$$