Examen Segundo Parcial — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 5 de Junio de 1999

TIPO B

1. Sólo se conocen 5 valores de un función $cos(x_n)$. Vamos a calcular el polinomio cuadrático que mejor aproxime a dicha función en el sentido de aproximación por mínimos cuadrados. Defina un producto interior con función peso $w = x^2$. Calcule los tres primeros polinomios w-ortogonales. Determine la expresión general de los coeficientes de la aproximación mínimo-cuadrática con dicho producto interior y de tipo polinómica de grado N; calcule sus valores particulares para $N = 2$ (polinomio cuadrático). Utilice sólo la información que se le provee en el enunciado.

2. ¿Cuál es el producto interior utilizado en la teoría de Sturm-Liouville para obtener los polinomios de Laguerre? Calcule la integral

$$\int_{-1}^{\infty} x^2\, e^{-x^2}\, dx,$$

mediante una fórmula de integración de Gauss-Laguerre de segundo orden (exacta para polinomios cuadráticos). Si necesita calcular los polinomios de Laguerre utilice la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x) - (2\,n + 1 - x)\, L_n(x) + n^2\, L_{n-1}(x) = 0.$$

3. Calcule la solución exacta de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = y_{n-1} + c\,(y_n - y_{n-2}), \qquad n \geq 2.$$

¿Cuánto vale el límite $\lim_{n\to\infty} y_n$?

4. Aplique el método de elementos finitos cG(1), que usa polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(b(x)\, u'(x))' = g(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Escriba la definición de la malla y de los espacios de búsqueda y de prueba que va a necesitar. Escriba las funciones bases nodales en dichos espacios. Escriba la formulación variacional de dicho problema. Calcule las fórmulas generales de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales que tiene que resolver.

5. Escriba cómo funciona el método de la potencia para calcular el valor propio real y simple de mayor módulo (λ_1). Sea r_k la aproximación en la iteración k-ésima a dicho autovalor. Demuestre que $r_{k+1} - \lambda_1 = (c + \delta_k)(r_k - \lambda_1)$ donde $\delta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.