Examen Segundo Parcial
Profesor Francisco R. Villatoro

Técnicas Numéricas
5 de Junio de 1999

TIPO D

1. Para evaluar numéricamente la función exponencial en un intervalo semi-infinito $[a, \infty]$ se puede utilizar la teoría de la aproximación de Sturm-Liouville, basada, por ejemplo, en polinomios ortogonales de Laguerre. Determine la fórmula general para la aproximación mínimo cuadrática de la función exponencial en el intervalo $[a, \infty]$ mediante polinomios de Laguerre. Calcule los polinomios de Laguerre de grado menor o igual que dos mediante el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt, suponiendo que conoce que $L_0(x) = 1$ y $L_1(x) = 1 - x$. Calcule la aproximación cuadrática de tipo mínimo-cuadrática de la función exponencial.

2. Determine la fórmula de integración gaussiana basada en polinomios de Laguerre (fórmula de Gauss-Laguerre) exacta hasta orden dos (polinomios cuadrados).

3. Para resolver el problema de valores iniciales $y' = f(x, y)$ podemos utilizar el método numérico

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{24} (35\, f_n - \beta\, f_{n-1}).$$

Para qué valores de β es dicho método consistente. ¿Qué orden de consistencia tiene dicho método? Determine los intervalos de estabilidad fuerte, absoluta y relativa de dicho método. ¿Es convergente dicho método?

4. Vamos a resolver el problema de valores de contorno

$$-(1 + a(x)\, u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

con condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas mediante el método de Galerkin espectral basado en polinomios trigonométricos en seno. Primero, escriba la formulación variacional de dicho problema. Luego, escriba las fórmulas generales de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales resultante. Para calcular las integrales, utilice el método de integración de la regla del trapecio.

5. Sea la matriz { $A = \begin{pmatrix} 2'6141 & -10'087 & -2'4480 & -2'24727 \\ -5'5345 & 4'6668 & 3'5719 & 2'8753 \\ 0 & -0'28730 & 0'14546 & 0'10900 \\ 0 & 0 & 0 & 3'5736 \end{pmatrix}$, $\} tienecomoautovalor 3'57$
que se obtiene por medio de dicho procedimiento a partir de la matriz dada.