Extraordinario de Febrero (Dic) Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Profesor Francisco R. Villatoro 9 de Diciembre de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:00 horas

1. Método en Diferencias Finitas (4.5 puntos). Sea el problema de condiciones de contorno no lineal siguiente. Encuentre una función $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$, dos veces continuamente diferenciable sobre el intervalo $[0,1]$, tal que

$$(\mathcal{P}) \equiv \begin{cases} -u''(x) + u(x)\, e^{u(x)} = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Vamos a resolver el problema $\mathcal{P}$ mediante diferencias finitas. Para ello definiremos la siguiente malla $\mathcal{T} \equiv \{x_j\}$, $x_j = j\,h$, $j = 0, 1, \ldots, N$, donde $h = 1/N$. Denotaremos por u_j a la aproximación numérica a $u(x_j)$ en la malla.

a) Proponga un esquema en diferencias finitas centradas de segundo orden de consistencia para el problema $\mathcal{P}$, primero para la ecuación (0.4 puntos)

b) y luego para las condiciones de contorno (0.1 puntos).

c) Escriba el término principal del error de truncado para dicho esquema en diferencias finitas (0.3 puntos).

d) Sea $\mathbf{u}$ el vector cuyas componentes son $(\mathbf{u})_j = u_j$. Escriba el esquema en diferencias finitas de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$, donde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Escriba $F_1(\mathbf{u})$ (0.1 puntos),

e) $F_j(\mathbf{u})$, $j = 2, \ldots, N$ (0.3 puntos),

f) y $F_N(\mathbf{u})$ (0.1 puntos).

g) Utilizaremos el método de Newton para resolver $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$. Calcule la matriz jacobiana $D\mathbf{F}(\mathbf{u})$. Para ello escriba la primera fila de dicha matriz (0.2 puntos),

h) la fila j-ésima con $j = 2, \ldots, N$, (0.4 puntos),

i) y la última fila de dicha matriz (0.2 puntos).

j) Escriba la formulación estándar del método de Newton (0.2 puntos).

k) Escriba la formulación delta del método de Newton (0.2 puntos).

l) Hemos obtenido un sistema lineal que se puede escribir como $Ax = b$. ¿Cuáles son A, x y b? (0.1 puntos).

m) Para resolverlo, aplicaremos el algoritmo de factorización LU. Escriba la matriz U (con diagonal unitaria) correspondiente a A, es decir, un algoritmo para calcular sus elementos, (0.5 puntos)

n) y escriba la matriz L (con diagonal no unitaria) para A, es decir, un algoritmo para calcular sus elementos (0.5 puntos).

ñ) Con la factorización LU, tiene que resolver un sistema triangular inferior, ¿cuál? (0.1 puntos),

o) y escriba un algoritmo para hacerlo (0.4 puntos),

p) y un sistema triangular superior; escriba un algoritmo para hacerlo (0.4 puntos).

2. <u>Método de Elementos Finitos</u> (5.5 puntos). Sea el siguiente problema de condiciones de contorno lineal. Encuentre una función u, donde $u : \mathbb{R} \supset [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$, tal que

$$(\mathcal{P}) \equiv \begin{cases} -\frac{d}{dx}\left((1+x)\,\frac{du}{dx}\right) = f(x), \qquad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 1, \end{cases}$$

donde $f : [0,1] \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ es una función continua dada. Vamos a resolver el problema $\mathcal{P}$ mediante elementos finitos.

a) Para escribir la formulación variacional de este problema: primero, defina un espacio vectorial de funciones adecuado como espacio de búsqueda (0.2 puntos),

b) segundo, defina una espacio vectorial de funciones adecuado como espacio de prueba (0.2 puntos),

c) finalmente, escriba la formulación variacional del problema $\mathcal{P}$ (0.5 puntos).

d) Considere la malla $\mathcal{T} \equiv \{x_j\}$, $x_j = j\,h$, $j = 0, 1, \ldots, N$, donde $h = 1/N$, y el espacio V_h de polinomios lineales continuos en dicha malla. Defina dicho espacio formalmente (0.2 puntos).

e) Escriba una función base de dicho espacio, $\varphi_j(x)$, para $j = 0$, (0.2 puntos),

f) para $j = 1, 2, \ldots, N-1$, (0.3 puntos),

g) y para $j = N$ (0.2 puntos).

h) Vamos a escribir la formulación variacional discreta del problema $\mathcal{P}$. Primero, defina un subespacio vectorial de V_h adecuado como espacio de búsqueda (0.2 puntos),

i) segundo, defina una subespacio vectorial de V_h adecuado como espacio de prueba (0.1 puntos),

j) finalmente, escriba la formulación variacional discreta del problema $\mathcal{P}$, sin detallar las bases, (0.2 puntos)

k) y detallando el desarrollo en las bases, (0.3 puntos).

l) ¿Cuál es la matriz A del sistema lineal $Ax = b$ resultante? (0.2 puntos)

m) ¿Cuáles son los elementos a_{ij} de la matriz A, con $|i-j| > 1$? (0.1 puntos),

n) Calcula los elementos a_{ij} de la matriz A, con $|i-j| = 1$, en función de $h = 1/N$, (0.3 puntos).

ñ) Calcula los elementos a_{ij} de la matriz A, con $|i-j| = 0$, en función de $h = 1/N$, (0.3 puntos).

o) Calcule el término no homogéneo (b) del sistema lineal utilizando integración por la regla (compuesta) del trapecio (0.3 puntos).

p) Considere el caso $f(x) = x^2$, y escriba el sistema lineal $Ax = b$ resultante del método de elementos finitos (sólo en función h) (0.3 puntos).

q) Demuestre que la matriz A es simétrica y definida positiva (0.3 puntos).

r) Vamos a determinar la factorización de Cholesky de A. ¿Cuál es el algoritmo para cacular la matriz triangular inferior L? (0.5 puntos)

s) ¿Qué sistemas de ecuaciones triangulares tiene que resolver para obtener la solución por Cholesky? (0.1 puntos)

t) Escriba un algoritmo para resolver uno de dichos sistemas (0.3 puntos)

u) Determine la solución exacta del problema $\mathcal{P}$ para $f(x) = x^2$ (0.2 puntos)