Examen FINAL Primer Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)

Alumno: — DNI:

.

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA

NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Sea A una matriz de coeficientes reales.

   a) Defina la exponencial de dicha matriz:

   $$\exp(-A\,t) =$$

   b) Si $A\,u_i = \lambda_i\,u_i$, calcule la expresión

   $$e^{-A\,t}\,u_i =$$

   c) Si $A = P^{-1}\,B\,P$ entonces

   $$e^{A} =$$

   es decir, si B es la matriz diagonal semejante a A mediante P, entonces

   $$\exp(-A\,t) =$$

2. Dada la función exponencial e^x determine aproxime dicha función para x pequeño mediante su desarrollo de Padé (cociente de polinomios) de grado (3,2) (numerador de grado 3 y denominador de grado 2).

   $$e^x =$$

3. Sea el sistema lineal $Ax = b$ donde

   $$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   a) Escriba la iteración del método de Gauss-Seidel en formato matricial ($A = L + D + U$)

   $$x^{(k+1)} =$$

   b) ¿Es definida positiva la matriz de coeficientes?

   ¿SI O NO? . Ya que sus autovalores son:

   $$\lambda_1 = \qquad \lambda_2 = \qquad \lambda_2 =$$

   Y sus menores principales A_i son

   $$A_1 = \qquad A_2 = \qquad A_2 =$$

c) Escriba la iteración del método de Gauss-Seidel con relajación en formato matricial ($A = L + D + U$)

$$x^{(k+1)} =$$

d) Escriba la ecuación que cumple el error $e^{(k)} = x - x^{(k)}$

$$e^{(k+1)} = N\, e^{(k)} =$$

e) La condición de convergencia del método (en función de las propiedades de N) es

y su polinomio característico:

$$|N - \lambda\, I| =$$

con lo que la condición de convergencia (en función de w) es

$$w \in$$

y el valor w^* óptimo es

$$w^* =$$

4. Considere la ecuación $f(x) = x - \tan x = 0$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene? y, ¿Cúales son?

Tiene   raíces.

Cada raíz se encuentra en el intervalo:

$$\xi_k \in I_k =$$

b) Considere la raíz positiva más pequeña. Un método iterativo de Picard con relajación es

$$x = x + \mu\,(\tan x - x).$$

Si la condición inicial se encuentra en el intervalo $\xi_1 \in [4{,}4, 4{,}5]$, cuál es el intervalo en el parámetro de relajación que garantiza la convergencia

$$\mu \in$$

5. Vamos a determina el número total de operaciones de división, producto y suma requeridas por el procedimiento de resolución de un sistema lineal mediante factorización LU de Crout.

a) El número total

1) de divisiones es

$$= O\Big(\qquad \Big),$$

2) de sumas es

$$= O\Big(\qquad \Big).$$

3) y de productos es

$$= O\Big(\qquad \Big).$$

b) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular superior U,

1) de divisiones es

2) de sumas es

3) y de productos es

c) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular inferior L,

1) de divisiones es

2) de sumas es

3) y de productos es

d) Por lo tanto, el número total de operaciones para el procedimiento de factorización LU es de

$$O\big(\qquad \big)$$

e) ¿Es mayor, igual o menor que el operaciones del método de factorización de Gauss?

¿Es mayor, igual o menor? Es .

. FECHA Y FIRMA