Examen FINAL Primer Parcial Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Alumno: DNI:
.
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Sea A una matriz de coeficientes reales.

   a) Defina la exponencial de dicha matriz.

$$\exp(-A\,t) = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-A\,t)^i}{i!}.$$

   b) Si $A\,u_i = \lambda_i\,u_i$, calcule la expresión

$$e^{-A\,t}\,u_i = e^{-\lambda_i\,t}\,u_i.$$

   c) Si $A = P^{-1}\,B\,P$ entonces

$$e^A = P^{-1}\,e^B\,P,$$

   es decir, si B es la matriz diagonal semejante a A mediante P, entonces

$$\exp(-A\,t) = P^{-1}\,\exp(-B\,t)\,P = P^{-1}\,\exp(-\lambda_i\,t)\,P.$$

2. Dada la función exponencial e^x determine aproxime dicha función para x pequeño mediante su desarrollo de Padé (cociente de polinomios) de grado (3,2) (numerador de grado 3 y denominador de grado 2).

$$e^x = \frac{60 + 36\,x + 9\,x^2 + x^3}{60 - 24\,x + 3\,x^2} = \frac{1 + \frac{3\,x}{5} + \frac{3\,x^2}{20} + \frac{x^3}{60}}{1 - \frac{2\,x}{5} + \frac{x^2}{20}}.$$

3. Sea el sistema lineal $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

   a) Escriba la iteración del método de Gauss-Seidel en formato matricial ($A = L + D + U$)

$$x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}\,(b - U\,x^{(k)}).$$

   b) ¿Es definida positiva la matriz de coeficientes?

¿SI O NO? $\quad SI \quad$. Ya que sus autovalores son:

$$\lambda_1 = 10, \qquad \lambda_2 = 10 + \sqrt{5}, \qquad \lambda_2 = 10 - \sqrt{5},$$

Y sus menores principales A_i son

$$A_1 = 10, \qquad A_2 = 99, \qquad A_2 = 950.$$

c) Escriba la iteración del método de Gauss-Seidel con relajación en formato matricial ($A = L + D + U$)

$$x^{(k+1)} = w\,(L + D)^{-1}\,(b - U\,x^{(k)}) + (1 - w)\,x^{(k)},$$

d) Escriba la ecuación que cumple el error $e^{(k)} = x - x^{(k)}$

$$e^{(k+1)} = N\,e^{(k)} = ((1 - w)\,I - w\,(L + D)^{-1}\,U)\,e^{(k)}$$

e) La condición de convergencia del método (en función de las propiedades de N) es

$$\rho(N) < 1.$$

y su polinomio característico:

$$|N - \lambda\,I| = (1 - 19\,w/20 - \lambda)\,(1 - w - \lambda)^2,$$

con lo que la condición de convergencia (en función de w) es

$$0 < w < 2.$$

y el valor w^* óptimo es

$$1 - 19\,w^*/20 = w^* - 1, \qquad w^* = \frac{40}{39} \approx 1{,}026.$$

4. Considere la ecuación $f(x) = x - \tan x = 0$.

a) ¿Cuántas soluciones tiene? y, ¿Cúales son?

Tiene infinitas raíces.

Cada raíz se encuentra en el intervalo:

$$\xi_k \in I_k = ((2\,k + 1)\,\frac{\pi}{2}, (2\,k + 3)\,\frac{\pi}{2}), \qquad k \in \mathrm{Z}.$$

b) Considere la raíz positiva más pequeña. Un método iterativo de Picard con relajación es

$$x = x + \mu\,(\tan x - x).$$

Si la condición inicial se encuentra en el intervalo $\xi_1 \in [4{,}4, 4{,}5]$, cuál es el intervalo en el parámetro de relajación que garantiza la convergencia

$$\mu \in (-0{,}093, 0).$$

5. Vamos a determina el número total de operaciones de división, producto y suma requeridas por el procedimiento de resolución de un sistema lineal mediante factorización LU de Crout.

a) El número total

1) de divisiones es

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n\,(n-1)}{2} = O\left(\frac{n^2}{2}\right),$$

2) de sumas es

$$\sum_{k=1}^{n} (n - k + 1)\,(k - 1) = \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{6},$$

3) y de productos es

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)\,(k-1)=+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3}=O\left(\frac{n^3}{3}\right).$$

b) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular superior U,

1) de divisiones es

$$n,$$

2) de sumas es

$$n\,(n-1)/2,$$

3) y de productos es

$$n\,(n-1)/2,$$

c) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular inferior L,

1) de divisiones es

$$0,$$

2) de sumas es

$$n\,(n-1)/2,$$

3) y de productos es

$$n\,(n-1)/2,$$

d) Por lo tanto, el número total de operaciones para el procedimiento de factorización LU es de

$$O\Big(2\,n^3/3\Big)$$

e) ¿Es mayor, igual o menor que el operaciones del método de factorización de Gauss?

¿Es mayor, igual o menor? Es igual .

. FECHA Y FIRMA