Examen FINAL Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)

Alumno: DNI:

.

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA

NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ un polinomio interpolador de Lagrange de $f'(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

a) Define la norma infinito de una función g continua

$$\|g\|_\infty = \qquad\qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

b) Escriba la fórmula exacta para el error de interpolación de $p(x)$ a $f'(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$f'(x) - p(x) =$$

c) Suponga que f es suficientemente diferenciable y acote la fórmula anterior (use la norma infinito y exprese el resultado en función de a, b y derivadas de f solamente)

$$|f'(x) - p(x)| \leq$$

d) Define un polinomio interpolador de Lagrange $q(x)$ tal que

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty \leq \epsilon(b-a)$$

$$q(x) =$$

e) Escribe $q(x)$ en función de $f'(x) - p(x)$.

$$q(x) =$$

f) Escriba una fórmula exacta para el error entre $q(x)$ a $f(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$q(x) - f(x) =$$

2. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y(x)),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector $(P(EC)^n)$.

a) Escriba un método PEC con predictor un método de Euler explícito y como corrector una regla del trapecio

b) Determine el término principal del error de truncado del método completo (en función de f y sus derivadas totales, y luego en función de y y sus derivadas)

$$y' - f(y) = TET \quad =$$

$$=$$

c) ¿Cuál es el orden de consistencia del corrector? ¿y del método completo?

Orden del corrector = , Orden del método = .

d) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) =$$

e) ¿Cuántas raíces espurias tiene este método numérico?

Tiene raíces espurias

f) Escriba el desarrollo de Taylor de la raíz principal hasta $O((h\lambda)^5)$

$$r_p =$$

g) ¿Es fuertemente estable este método?

¿SI o NO? .

h) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

¿SI o NO? ., $h\lambda \in$

i) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

¿SI o NO? ., $h\lambda \in$

j) Considere un método $PECEC$ (donde se aplica dos veces el corrector). Determine el término principal del error de truncado del método completo (en función de f y sus derivadas totales, y luego en función de y y sus derivadas)

$$y' - f(y) = TET \quad =$$

$$=$$

k) ¿Cuál es el orden de consistencia del nuevo método completo?

El método es de orden.

l) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) =$$

m) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

¿SI o NO? ., $h\lambda \in$

n) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

¿SI o NO? ., $h\lambda \in$

3. Consideremos la regla de integración de Simpson para la integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

a) Escriba regla de integración de Simpson para dicha integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \Im(f) = \frac{h}{3}\,\left(f(-h) + 4\,f(0) + f(h)\right).$$

b) Escriba el error de integración (o de aproximación o de truncado) para dicha fórmula numérica

$$EI(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) =$$

c) Suponga que al evaluar la función $f(x)$ se comete un error igual a $\epsilon = fl(f(x)) - f(x)$, igual para todos los nodos; ¿cuál es el error total (integración más redondeo) que se comete al aplicar Simpson?,

$$ET(f) =$$

d) Sean $h = (b-a)/(2N)$, $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Considere la fórmula de Simpson compuesta que se obtiene usando segmentos de longitud $2h$, es decir, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Escriba dicha fórmula (sólo aparecerán valores de f en los nodos):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \Im_{ab}(f) &= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1} \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)\end{aligned}$$

e) Cuál es el error de integración de la fórmula de Simpson compuesta del apartado anterior (en función de h, a y b, no debe aparecer N)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Im_{ab}(f) =$$

f) La regla de Simpson es exacta para polinomios de grado a lo sumo

De grado

g) Cuál es el orden de exactitud de la fórmula de Simpson compuesta

Es de orden

. FECHA Y FIRMA