Examen FINAL Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)

Alumno: DNI:

.

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA

NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ un polinomio interpolador de Lagrange de $f'(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

a) Define la norma infinito de una función g continua

$$\|g\|_\infty = \max_{a\leq x\leq b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

b) Escriba la fórmula exacta para el error de interpolación de $p(x)$ a $f'(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$f'(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{N}(x - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, x]$$

c) Suponga que f es suficientemente diferenciable y acote la fórmula anterior (use la norma infinito)

$$|f'(x) - p(x)| \leq \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}|\prod_{i=0}^{N}(x - x_i)| \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|}{(N+1)!}|b-a|^{N+1}$$

d) Define un polinomio de Newton $q(x)$ tal que

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty \leq \epsilon(b-a)$$

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

e) Escribe $q(x)$ en función de $f'(x) - p(x)$.

$$q(x) = f(x) - \int_a^x (f'(t) - p(t))\,dt$$

f) Escriba una fórmula exacta para el error entre $q(x)$ a $f(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$q(x) - f(x) = -\int_a^x \prod_{i=0}^{N}(t - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, t]\,dt$$

2. Para calcular la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

podemos utilizar una regla de integración gaussiana basada en polinomios ortogonales de Chebyshev.

a) Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y(x)),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector ($P(EC)^n$).

1) Escriba un método PEC con predictor un método de Euler explícito y como corrector una regla del trapecio

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h f(y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})\right),$$

2) Determine el término principal del error de truncado del método completo (predictor sustituido en el corrector)

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{f(y(x))\, f'(y(x))^2}{6} - \frac{f(y(x))^2\, f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{y'(x)\, y''(x)^2}{6} - \frac{y'(x)^2\, y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

3) ¿Cuál es el orden de consistencia del corrector? ¿y del método completo?

2, segundo para los dos

4) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

5) ¿Cuántas raíces espurias tiene este método numérico?

ninguna

6) Escriba el desarrollo de Taylor de la raíz principal hasta $O((h\lambda)^5)$

$$r = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

7) ¿Es fuertemente estable este método?

SI

8) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

NO, $\qquad h\lambda \in [-2, 0]$

9) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

SI, $\qquad h\lambda \in (-\infty, \infty)$

10) Considere un método $PECEC$ (donde se aplica dos veces el corrector). Determine el término principal del error de truncado del método completo

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{-\left(f(y(x))\,f'(y(x))^2\right)}{12} - \frac{f(y(x))^2\,f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{-\left(y'(x)\,y''(x)^2\right)}{12} - \frac{y'(x)^2\,y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

11) ¿Cuál es el orden de consistencia del nuevo método completo?

$$2, \text{ segundo orden}$$

12) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r,h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2} - \frac{(h\lambda)^3}{4}$$

13) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

$$\text{NO}, \qquad h\lambda \in [-2,0]$$

14) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

$$\text{SI}, \qquad h\lambda \in (-\infty,\infty)$$

b) Consideremos la regla de integración de Simpson para la integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

1) Escriba regla de integración de Simpson para dicha integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \Im(f) = \frac{h}{3}\,\left(f(-h) + 4\,f(0) + f(h)\right).$$

2) Escriba el error de integración (o de aproximación o de truncado) para dicha fórmula numérica

$$EI(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (-h,h)$$

3) Suponga que al evaluar la función $f(x)$ se comete un error igual a $\epsilon = fl(f(x)) - f(x)$, igual para todos los nodos; ¿cuál es el error total (integración más redondeo) que se comete al aplicar Simpson?,

$$ET(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) + 2h\epsilon,$$

4) Sean $h = (b-a)/(2N)$, $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Considere la fórmula de Simpson compuesta que se obtiene usando segmentos de longitud $2h$, es decir, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Escriba dicha fórmula (sólo aparecerán valores de f en los nodos):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx \Im_{ab}(f) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_{2i} + 4 f_{2i+1} + f_{2i+2}\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right) \end{aligned}$$

5) Cuál es el error de integración de la fórmula de Simpson compuesta del apartado anterior (en función de h, a y b, no debe aparecer N)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Im_{ab}(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$$

6) La regla de Simpson es exacta para polinomios de grado a lo sumo

3 (de tercer grado)

7) Cuál es el orden de exactitud de la fórmula de Simpson compuesta

4 (es de cuarto orden)

. FECHA Y FIRMA