Examen FINAL Primer Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)

Alumno: DNI:

.

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA

NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Dada la función exponencial e^x determine aproxime dicha función para x pequeño mediante su desarrollo de Padé (cociente de polinomios) de grado (3,2) (numerador de grado 3 y denominador de grado 2).

$$e^x =$$

2. Vamos a determina el número total de operaciones de división, producto y suma requeridas por el procedimiento de resolución de un sistema lineal mediante factorización LU de Crout.

   a) El número total

      1) de divisiones es

      $$= O\Big(\qquad \Big),$$

      2) de sumas es

      $$= O\Big(\qquad \Big).$$

      3) y de productos es

      $$= O\Big(\qquad \Big).$$

   b) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular superior U,

      1) de divisiones es

      2) de sumas es

      3) y de productos es

   c) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular inferior L,

      1) de divisiones es

      2) de sumas es

3) y de productos es

d) Por lo tanto, el número total de operaciones para el procedimiento de factorización LU es de

$$O(\qquad\qquad)$$

e) ¿Es mayor, igual o menor que el operaciones del método de factorización de Gauss?

¿Es mayor, igual o menor? Es .

3. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ un polinomio interpolador de Lagrange de $f'(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

a) Define la norma infinito de una función g continua

$$\|g\|_\infty = \qquad\qquad\qquad\qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

b) Escriba la fórmula exacta para el error de interpolación de $p(x)$ a $f'(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$f'(x) - p(x) =$$

c) Suponga que f es suficientemente diferenciable y acote la fórmula anterior (use la norma infinito y exprese el resultado en función de a, b y derivadas de f solamente)

$$|f'(x) - p(x)| \leq$$

d) Define un polinomio interpolador de Lagrange $q(x)$ tal que

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty \leq \epsilon(b-a)$$

$$q(x) =$$

e) Escribe $q(x)$ en función de $f'(x) - p(x)$.

$$q(x) =$$

f) Escriba una fórmula exacta para el error entre $q(x)$ a $f(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$q(x) - f(x) =$$

4. Consideremos la regla de integración de Simpson para la integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx$$

a) Escriba regla de integración de Simpson para dicha integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \Im(f) = \frac{h}{3}\,(f(-h) + 4\,f(0) + f(h))\,.$$

b) Escriba el error de integración (o de aproximación o de truncado) para dicha fórmula numérica

$$EI(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) =$$

c) Suponga que al evaluar la función $f(x)$ se comete un error igual a $\epsilon = fl(f(x)) - f(x)$, igual para todos los nodos; ¿cuál es el error total (integración más redondeo) que se comete al aplicar Simpson?,

$$ET(f) =$$

d) Sean $h = (b-a)/(2N)$, $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Considere la fórmula de Simpson compuesta que se obtiene usando segmentos de longitud $2h$, es decir, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Escriba dicha fórmula (sólo aparecerán valores de f en los nodos):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx \Im_{ab}(f) &= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1} \\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} \qquad\qquad\qquad\qquad\right) \end{aligned}$$

e) Cuál es el error de integración de la fórmula de Simpson compuesta del apartado anterior (en función de h, a y b, no debe aparecer N)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Im_{ab}(f) =$$

f) La regla de Simpson es exacta para polinomios de grado a lo sumo

De grado

g) Cuál es el orden de exactitud de la fórmula de Simpson compuesta

Es de orden

. FECHA Y FIRMA