Examen FINAL Primer Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Alumno: — DNI:
.
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Dada la función exponencial e^x determine aproxime dicha función para x pequeño mediante su desarrollo de Padé (cociente de polinomios) de grado (3,2) (numerador de grado 3 y denominador de grado 2).

$$e^x = \frac{60+36\,x+9\,x^2+x^3}{60-24\,x+3\,x^2} = \frac{1+\frac{3\,x}{5}+\frac{3\,x^2}{20}+\frac{x^3}{60}}{1-\frac{2\,x}{5}+\frac{x^2}{20}}.$$

2. Vamos a determina el número total de operaciones de división, producto y suma requeridas por el procedimiento de resolución de un sistema lineal mediante factorización LU de Crout.

   a) El número total

      1) de divisiones es
      $$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n\,(n-1)}{2} = O\left(\frac{n^2}{2}\right),$$

      2) de sumas es
      $$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\,(k-1) = \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{6},$$

      3) y de productos es
      $$\sum_{k=1}^{n} (n-k)\,(k-1) = +\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3} = O\left(\frac{n^3}{3}\right).$$

   b) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular superior U,

      1) de divisiones es
      $$n,$$

      2) de sumas es
      $$n\,(n-1)/2,$$

      3) y de productos es
      $$n\,(n-1)/2,$$

   c) El número de operaciones requeridas para la resolución del sistema triangular inferior L,

      1) de divisiones es
      $$0,$$

      2) de sumas es
      $$n\,(n-1)/2,$$

      3) y de productos es
      $$n\,(n-1)/2,$$

d) Por lo tanto, el número total de operaciones para el procedimiento de factorización LU es de

$$O\Big(2\,n^3/3\Big)$$

e) ¿Es mayor, igual o menor que el operaciones del método de factorización de Gauss?

¿Es mayor, igual o menor? Es igual .

3. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ un polinomio interpolador de Lagrange de $f'(x)$ tal que

$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

a) Define la norma infinito de una función g continua

$$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

b) Escriba la fórmula exacta para el error de interpolación de $p(x)$ a $f'(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$f'(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{N}(x - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, x]$$

c) Suponga que f es suficientemente diferenciable y acote la fórmula anterior (use la norma infinito)

$$|f'(x) - p(x)| \leq \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} |\prod_{i=0}^{N}(x - x_i)| \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|}{(N+1)!} |b-a|^{N+1}$$

d) Define un polinomio de Newton $q(x)$ tal que

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty \leq \epsilon(b-a)$$

$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

e) Escribe $q(x)$ en función de $f'(x) - p(x)$.

$$q(x) = f(x) - \int_a^x (f'(t) - p(t))\,dt$$

f) Escriba una fórmula exacta para el error entre $q(x)$ a $f(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$q(x) - f(x) = -\int_a^x \prod_{i=0}^{N}(t - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, t]\,dt$$

4. Consideremos la regla de integración de Simpson para la integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

a) Escriba regla de integración de Simpson para dicha integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \Im(f) = \frac{h}{3}\,\left(f(-h) + 4\,f(0) + f(h)\right).$$

b) Escriba el error de integración (o de aproximación o de truncado) para dicha fórmula numérica

$$EI(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (-h, h)$$

c) Suponga que al evaluar la función $f(x)$ se comete un error igual a $\epsilon = fl(f(x)) - f(x)$, igual para todos los nodos; ¿cuál es el error total (integración más redondeo) que se comete al aplicar Simpson?,

$$ET(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) + 2h\epsilon,$$

d) Sean $h = (b-a)/(2N)$, $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Considere la fórmula de Simpson compuesta que se obtiene usando segmentos de longitud $2h$, es decir, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Escriba dicha fórmula (sólo aparecerán valores de f en los nodos):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx \Im_{ab}(f) &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{N-1} (f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}) \\ &= \frac{h}{3} \left(f_0 + f_{2N} + 4 \sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f_{2i} \right) \end{aligned}$$

e) Cuál es el error de integración de la fórmula de Simpson compuesta del apartado anterior (en función de h, a y b, no debe aparecer N)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Im_{ab}(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\xi)$$

f) La regla de Simpson es exacta para polinomios de grado a lo sumo

3 (de tercer grado)

g) Cuál es el orden de exactitud de la fórmula de Simpson compuesta

4 (es de cuarto orden)

. FECHA Y FIRMA