SOLO PRIMER PARCIAL — Técnicas Numéricas (y Comp.)

Duración 3:30 horas — 9 de Septiembre de 2000

NO SE PERMITEN NI APUNTES NI CALCULADORA (OPERE A MANO).

1. Sea $w \in \mathbb{C}^n$ con $\|w\|_2 = 1$ y defina la matriz

$$A = I - 2\, w\, w^{*\top}.$$

   a) ¿A es simétrica? Demuéstrelo.
   b) ¿A es hermítica? Demuéstrelo.
   c) ¿Cómo son sus autovalores? Demuéstrelo.
   d) ¿Cómo son sus autovectores? Demuéstrelo.
   e) ¿Cómo son sus filas entre sí? y, ¿sus columnas?
   f) Escribe su forma normal de Schur.
   g) ¿Se puede aplicar el método de Cholesky a dicha matriz?, ¿por qué?

<u>Solución</u>.

a) Calculando por partes,

$$A^* = I^* - 2\, w^* w^\top = I - 2\, w^* w^\top,$$

$$A^{*\top} = I^\top - 2\, (w^\top)^\top (w^*)^\top = I - 2\, w w^{*\top} = A,$$

observamos que A es hermítica. Si w fuera real, sería simétrica.

b) Sus autovalores son reales por ser hermítica (demuestrelo).

c) Sus autovectores son linealmente independientes y ortogonales, por lo que forman una base de $\mathbb{C}^n$ (demuestrelo).

d) Además es unitaria, ya que

$$A A^{*\top} = (I - 2\, w w^{*\top})^2 = I - 4\, w w^{*\top} + 4 w \underbrace{w^{*\top} w}_{\|w\|_2 = 1} w^{*\top} = I,$$

por lo que sus vectores fila (o columna) son ortonormales.

e) Como A es hermítica, su forma normal de Schur es diagonal (demuestrelo), más aún, como es unitaria, sus autovalores son iguales a la unidad (demuestrelo).

f) Como es hermítica y definida positiva (autovalores positivos), el algoritmo de Cholesky se puede aplicar sin ningún problema.

2. Dado el sistema $A\,x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix},$$

resuélvalo por medio de los siguientes métodos

a) Utilizando factorización de Cholesky.

b) Utilizando el método de Gauss-Jordan con pivotaje total o completo.

c) ¿Qué ventajas tiene usar pivotaje?

d) ¿Se puede aplicar el método de Gauss-Jacobi? Justifique su respuesta.

e) Escribe el método de Gauss-Jacobi en forma matricial y aplique dos iteraciones a partir de la solución $x^{(0)} = 0$. El resultado DEBE obtenerse utilizando números racionales.

f) Determine la tasa de convergencia (exacta) del método de Gauss-Jacobi.

g) Estime la tasa de convergencia las iteraciones del método.

h) Escriba la formulación matricial del método de relajación basado en Gauss-Seidel,

i) Determine la tasa de convergencia (exacta) de dicho método (en función del parámetro de relajación).

j) Determine el valor óptimo del parámetro de relajación.

k) Escriba dos iteraciones a partir de $x^{(0)} = 0$. Presente el resultado con número reales de dos dígitos de precisión.

<u>Solución</u>.

a) No se puede, porque no es simétrica.

b) Dado que la matriz no es simétrica, vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan con pivotaje total o completo. Para el primer pivote no hay que reordenar la matriz, y tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 1 & 14 \\ 2 & -10 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 10 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & 53 & -14 & 39 \\ 0 & -27 & -99 & -126 \end{array}\right);$$

ahora debemos intercambiar las filas 2 y 3, y las columnas 2 y 3,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -99 & -27 & -126 \\ 0 & -14 & 53 & 39 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 3 & 1 & 14 \\ 0 & -99 & -27 & -126 \\ 0 & 0 & 5625 & 5625 \end{array}\right);$$

y ahora resolviendo el sistema triangular superior obtenido recordando que las incógnitas están en el orden $2, 3, 1$, tenemos

$$x_2 = 1, \quad x_3 = (-126 + 27)(-99) = 1, \quad x_1 = 1.$$

c) La ventaja del método de Gauss-Jordan con pivotaje completo es que minimiza posibles diferencias cancelativas y divisiones por números cercanos pequeños, que son susceptibles a propagación de errores.

d) Al ser la matriz de coeficientes A diagonalmente dominante por filas, el método iterativo de Gauss-Jacobi está garantizado que converge,

$$x^{(k)} = D^{-1}\,(b - (L + U)\,x^{(k-1)}).$$

Vamos a realizar dos iteraciones a partir de $x^{(0)} = 0$,

$$x^{(1)} = (7/5, 1/2, 7/5)^\top, \qquad x^{(2)} = (111/100, 6/5, 111/100)^\top.$$

La tasa de convergencia del método de Gauss-Jacobi es el radio espectral de su matriz de convergencia

$$\rho(D^{-1}\,(L + U)),$$

donde

$$J = D^{-1}\,(L + U) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$|J-\lambda\, I| = -3/200-7\,\lambda/50-\lambda^3 = (1+10\,\lambda)\,(-3+2\,\lambda-20\,\lambda^2) = 0,$$

que resolviendo la ecuación cuadrática (2 raíces complejas conjugadas) nos da para el radio espectral, es decir, la tasa de convergencia del método de Gauss-Jacobi

$$\rho(J) = \max_i |\lambda_{Ji}| = \max\{1/10, \sqrt{15}/10\} = \sqrt{15}/10 \approx 0{,}387.$$

La tasa de convergencia también se puede estimar utilizando los dos últimos (en nuestro caso los únicos) iterados del método de la forma

$$\|e_2\| \leq \|J\|\,\|e_1\|, \qquad \|J\| \approx \frac{\|e_2\|_1}{\|e_1\|_1} = \frac{21}{65} \approx= 0{,}323,$$

donde $e_i = x - x_i$.

e) Vamos a aplicar el método de relajación al método iterativo de Gauss-Seidel,

$$x^{(k)} = w\,(L+D)^{-1}\,(b - U\,x^{(k-1)}) + (1-w)\,x^{(k-1)}.$$

Para estudiar la convergencia de este método tenemos que calcular su tasa de convergencia

$$\rho(SOR) = \rho((1-w)\,I - w\,(L+D)^{-1}\,U),$$

donde

$$SOR = \begin{pmatrix} 1-w & -3\,w/10 & -w/10 \\ 0 & 1-53\,w/50 & 7\,w/25 \\ 0 & 6\,w/125 & 1-537\,w/500 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$|SOR-\lambda\, I| = (w-1+\lambda)\,(-1+2\,\lambda-1\,\lambda^2+\frac{2134}{1000}\,(1-\lambda)\,w-\frac{1125}{1000}\,w^2),$$

que resolviendo la ecuación cuadrática nos dan los autovalores

$$\lambda_{SOR} = 1-w, \qquad \lambda_{SOR} = 1-(1067 \pm \sqrt{13489})\,w/1000,$$

es decir,

$$\lambda_{SOR} = 1 - w, \qquad \lambda_{SOR} = 1 - 1{,}183\, w, \qquad \lambda_{SOR} = 1 - 0{,}9509\, w,$$

y la tasa de convergencia del método de Gauss-Seidel con relajación

$$\rho(SOR) = \max_i |\lambda_{SORi}| = \max_{0\le w\le 2} \{|1-w|, |1-1{,}183\, w|, |1-0{,}9509\, w|\},$$

será mínima para un w^* y valdrá (como se puede comprobar fácilmente dibujando las funciones en w) en la región en la que converge

$$1 > \rho(SOR) = \begin{cases} 1 - 0{,}9509\, w, & 0 < w \le w^*, \\ -1 + 1{,}183\, w, & w^* \le w < 1{,}690, \end{cases}$$

dando como valor óptimo

$$1 - 0{,}9509\, w^* = -1 + 1{,}183\, w^*, \qquad w^* = 0{,}937,$$

es decir, realizaremos una subrelajación en lugar de una sobrerrelajación con una tasa de convergencia de

$$\rho(SOR) \approx 0{,}1088.$$

Vamos a realizar dos iteraciones a partir de $x^{(0)} = 0$,

$$x^{(1)} = (1{,}3, 0{,}73, 0{,}96)^\top, \qquad x^{(2)} = (1{,}1, 0{,}99, 0{,}99)^\top.$$

3. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 1,$$

determine:

a) Determine una sucesión de Sturm asociada a este polinomio.

b) Obtenga la tabla de signos asociada a dicha sucesión de polinomios.

c) ¿Cuántas raíces tiene dicho polinomio?

d) ¿Cuántas raíces reales tiene dicho polinomio?

e) ¿Cuántas raíces positivas? Escriba un intervalo de longitud unidad en el que se encuentren cada una de ellas.

f) ¿Cuántas raíces negativas? Escriba un intervalo de longitud unidad en el que se encuentren cada una de ellas.

g) Según el criterio de los signos de Descartes, ¿cuántas raíces positivas hay?

h) Según el criterio de los signos de Descartes, ¿cuántas raíces negativas hay?

i) Aplique el criterio de Cauchy y determine una región en el plano complejo en la que se encuentren todas las raíces del polinomio.

j) ¿Cuántas raíces complejas hay?

k) Determine sendos intervalos para la parte imaginaria de cada una de las raíces complejas.

l) El algoritmo de Bairstow consiste en dividir el polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entre el factor cuadrático $c(u, v) = z^2 - uz - v$. Determine el cociente y el resto de dicha división, especificando sus coeficientes b_j como una relación de recurrencia en función de u y v.

m) Qué ecuaciones hay que resolver mediante el método de Newton como parte del método de Bairstow.

n) Aplique el método de Newton y obtenga las relaciones de recurrencia para las derivadas parciales de los coeficientes b_j entre u y v.

ñ) Escriba el método de Newton en formulación delta a partir de las expresiones del apartado anterior.

Solución. Para resolver este problema vamos a utilizar el método de las sucesiones de Sturm (que tiene como único defecto que sólo determina el número de raíces distintas). La sucesión de Sturm más simple es

$$p_1(x) = p(x), \qquad p_2(x) = -p'(x) = -4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 1,$$

$$p_i = \mathrm{mod} p_{i-2}(x), p_{i-1}(x),$$

que se obtiene fácilmente utilizando el algoritmo de Euclides de división de polinomios, dando

$$16\,p_1(x) = (1-4\,x)\,p_2(x)\,\underbrace{-11\,x^2+10\,x-15}_{p_3(x)},$$

$$121\,p_2(x) = (44\,x+7)\,p_3(x)\,\underbrace{+832\,x-16}_{p_4(x)},$$

$$43264\,p_3(x) = (509-572\,x)\,p_2(x)\,\underbrace{-640816}_{p_5(x)},$$

con lo que obtenemos la tabla de signos

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	total
$-\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
$+\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3
0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
-1	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	2
-2	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	2
2	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	3

que nos indica que existen 2 raíces reales distintas, una de ellas (negativa) en $[-1,-2]$ y la otra (positiva) en $[1,2]$.

Aplicando el criterio de los signos de Descartes obtenemos que hay tres cambios de signo v_p y por tanto el número de raíces positivas n_p cumple que $v_p - n_p \in \{0,2,4\}$, luego o hay 1 raíz positiva o hay tres. En cuanto al número de raíces negativas, aplicando Descartes a $q(x) = p(-x)$, obtenemos $v_q = 1$ y por tanto $v_q - n_q \in \{0,2,4\}$, hay exactamente una raíz negativa.

Aplicando el criterio de Cauchy que dice que las raíces (complejas o reales) están incluidas en el disco de radio

$$\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max_{0\leq k\leq n} |a_k|.$$

Para $p(x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota superior $|x_i| < 2$. Para $p(1/x)$ obtenemos $\rho = 2$, luego las raíces tienen la cota inferior $|x_i| > 1/2$. Como sabemos por el criterio de Descartes que hay una raíz negativa, esta estará en el intervalo $[-2,-1/2]$. La raíz, o las tres, reales positivas del polinomio estarán en el intervalo $[1/2,2]$.

a) Hay una raíz (real) positiva (Sturm).

b) Hay una raíz (real) negativa (Descartes o Sturm).

c) La raíz positiva está en $[1,2]$ (Sturm) y la negativa en $[-2,-1]$ (Sturm).

d) Hay un par de raíces complejas conjugadas de parte real en $[1/2,2]$ y de parte imaginaria en $[0,2]$ y $[-2,0]$, respectivamente (Cauchy).

e) El algoritmo de Bairstow consiste en dividir el polinomio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

entre el factor cuadrático $c(u,v) = z^2 - uz - v$, obteniendo

$$p(z) = (b_n z^{n-2} + b_{n-1} z^{n-3} + \cdots + b_3 z + b_2)\, c(u,v) + b_1(z-u) + b_0,$$

donde comparando coeficientes ($b_{n+1} = b_{n+2} = 0$)

$$b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}, \qquad k = n, n-1, \ldots, 0. \tag{1}$$

La división será exacta si $b_0 = b_1 = 0$, por lo que resolveremos las ecuaciones

$$b_0(u,v) = 0, \qquad b_1(u,v) = 0,$$

mediante el método de Newton. Definiendo las derivadas que aparecen en el Jacobiano y calculándolas derivando la relación de recurrencia (1),

$$c_k = \frac{\partial b_k}{\partial u} = b_{k+1} + u\, c_{k+1} + v\, c_{k+2}, \qquad (c_{n+1} = c_n = 0),$$

$$d_k = \frac{\partial b_{k-1}}{\partial v} = b_{k+1} + u\, d_{k+1} + v\, d_{k+2} = c_{k-1}, \qquad (d_{n+1} = d_n = 0),$$

obtenemos la siguiente iteración de Newton en formulación delta

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}, \qquad \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_0(u,v) \\ b_1(u,v) \end{pmatrix},$$

cuya solución se escribe directamente

$$\delta u = \frac{c_1 b_1 - c_2 b_0}{J}, \qquad \delta v = \frac{c_1 b_0 - c_0 b_1}{J}, \qquad J = c_0 c_2 - c_1^2.$$

Tomando como condición inicial

$$z^2 - uz + v = (z - 1{,}5)(z + 1{,}5), \qquad u = 0, \quad v = -2{,}25,$$

e iterando el método, obtenemos (note que $b_4 = c_3 = 1, c_4 = 0$)

b_0	b_1	b_2	b_3	c_0	c_1	c_2	u	v	Iter
6,31	3,25	$-3{,}25$	-1	5,5	$-5{,}5$	-1	0,32	$-0{,}78$	1
0,84	0,88	$-2{,}00$	$-0{,}68$	0,22	$-2{,}89$	$-0{,}35$	0,59	$-0{,}47$	2
$-0{,}0937$	0,183	$-1{,}71$	$-0{,}41$	$-1{,}12$	$-2{,}07$	0,18	0,67	$-0{,}56$	3
$-0{,}0177$	$-0{,}00874$	$-1{,}78$	$-0{,}329$	$-1{,}61$	$-2{,}10$	0,341	0,666	$-0{,}561$	4
$1{,}94 \cdot 10^{-5}$	$6{,}98 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}78$	$-0{,}334$	$-1{,}60$	$-2{,}12$	0,332	0,666	$-0{,}561$	5

y como b_0 y b_1 son prácticamente cero, podemos calcular dos de las raíces

$$q(z) = z^2 - 0{,}666\, z + 0{,}561 = 0, \qquad z_c = 0{,}333 \pm 0{,}671\mathrm{i},$$

y aplicando deflacción,

$$p(z) = (-1{,}783 - 0{,}334 z + z^2)\, q(z), \qquad z_- = -1{,}179, \quad z_+ = 1{,}513.$$

f) Lo primero que hay que hacer es estudiar la convergencia del método de Newton

$$g(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}, \qquad g'(z) = 2 - \frac{p(z)\, p''(z)}{p'(z)^2},$$

$$g'(z) = \frac{2\, z\, (-6 + 6\, z + 10\, z^2 - 3\, z^3 - 15\, z^4 + 10\, z^5)}{(1 - 2\, z - 3\, z^2 + 4\, z^3)^2},$$

y evaluando esta expresión en cualquiera de las raíces, es decir, sustituyendo z^4 por $r(z) = z^3 + z^2 - z + 1$, z^5 por $zr(z)$ y z^6 por $zr(z)$, de forma reiterada y simplificando, obtenemos que

$$g'(z) = 2 > 1, \qquad z \in z_-, z_+, z_c,$$

luego el método de Newton diverge para todas las raíces y no existe un entorno suficientemente pequeño que garantice su convergencia. El alumno puede comprobarlo numéricamente si así lo desea.

PUNTUACIÓN =