Examen Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Mayo de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Consideremos la regla de integración de Simpson para la integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

   a) Escriba regla de integración de Simpson para dicha integral

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \Im(f) = \frac{h}{3}\,\left(f(-h) + 4\,f(0) + f(h)\right).$$

   b) Escriba el error de integración (o de aproximación o de truncado) para dicha fórmula numérica

$$EI(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (-h,h)$$

   c) Suponga que al evaluar la función $f(x)$ se comete un error igual a $\epsilon = fl(f(x)) - f(x)$, igual para todos los nodos; ¿cuál es el error total (integración más redondeo) que se comete al aplicar Simpson?,

$$ET(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \Im(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) + 2h\epsilon,$$

   d) Sean $h = (b-a)/(2N)$, $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Considere la fórmula de Simpson compuesta que se obtiene usando segmentos de longitud $2h$, es decir, $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Escriba dicha fórmula (sólo aparecerán valores de f en los nodos):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \Im_{ab}(f) &= \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1} \left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right)\\ &= \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right)\end{aligned}$$

e) Cuál es el error de integración de la fórmula de Simpson compuesta del apartado anterior (en función de h, a y b, no debe aparecer N)

$$\int_a^b f(x)\,dx - \Im_{ab}(f) = -\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$$

f) La regla de Simpson es exacta para polinomios de grado a lo sumo

$$3 \quad \text{(de tercer grado)}$$

g) Cuál es el orden de exactitud de la fórmula de Simpson compuesta

$$4 \quad \text{(es de cuarto orden)}$$

2. Sea $y(x)$ una función analítica y h una constante. Definimos los operadores en diferencias finitas

$$Ey(t) = y(t{+}h), \qquad \Delta = E{-}1, \qquad \nabla = 1{-}E^{-1}, \qquad \delta = E^{1/2}{-}E^{-1/2}.$$

a) Obtenga la expresión de todos estos operadores en función del operador derivada $D \equiv d/dx$

$$E = e^{hD}, \qquad \Delta = e^{hD} - 1,$$

$$\nabla = 1 - e^{-hD}, \qquad \delta = e^{hD/2} - e^{-hD/2} = 2\sinh(hD/2),$$

b) Determine la expresión del operador derivada en función del operador en diferencias hacia adelante y obtenga su desarrollo de Taylor hasta quinto orden

$$D = \frac{1}{h}\log(1+\Delta) = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + O\big(\Delta^5\big)\right),$$

c) Determine la expresión del operador derivada en función del operador en diferencias hacia atrás y obtenga su desarrollo de Taylor hasta quinto orden

$$D = \frac{1}{h}\log(1-\nabla) = \frac{1}{h}\left(-\nabla - \frac{\nabla^2}{2} - \frac{\nabla^3}{3} - \frac{\nabla^4}{4} + O\big(\nabla^5\big)\right),$$

d) Determine la expresión del operador derivada en función del operador en diferencias centradas y obtenga su desarrollo de Taylor hasta quinto orden

$$D = \frac{2}{h}\text{argsinh}\,\frac{\delta}{2} = \frac{1}{h}\left(\delta - \frac{\delta^3}{24} + O\big(\delta^5\big)\right),$$

e) Determine la expresión para la segunda derivada en función del operador en diferencias centrado y obtenga su desarrollo de Taylor hasta quinto orden

$$D^2 = \frac{4}{h^2}\text{argsinh}^{\,2}\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 - \frac{\delta^4}{12} + O\big(\delta^5\big)\right),$$

3. Resuelva el problema

$$-((1+x)\,u'(x))' = 1 + (1 + 3\,x - x^2)\,exp(-x), \qquad 0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$, mediante el método de Galerkin espectral con polinomios trigonométricos en seno

$$U(x) = \sum_{j=1}^{3} \xi_j\, \sin(j\,\pi\,x).$$

para $q = 3$. Para calcular las integrales que le surjan utilice la regla del trapecio.

a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0,0,0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

4. Si el método de la potencia se aplica a una matriz real con un vector inicial también real, ¿qué sucederá si el valor propio dominante es complejo? ¿Se puede aplicar el método en dicho caso?

CON POTENCIA INVERSA

a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0,0,0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.