Examen Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Mayo de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Sea $f(x) \in \mathrm{C}^1[a,b]$ y $p(x)$ un polinomio interpolador de Lagrange de $f'(x)$ tal que
$$\|f'(x) - p(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

   a) Define la norma infinito de una función g continua
$$\|g\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|, \qquad g \in \mathrm{C}[a,b].$$

   b) Escriba la fórmula exacta para el error de interpolación de $p(x)$ a $f'(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.
$$f'(x) - p(x) = \prod_{i=0}^{N} (x - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, x]$$

   c) Suponga que f es suficientemente diferenciable y acote la fórmula anterior (use la norma infinito)
$$|f'(x) - p(x)| \leq \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} | \prod_{i=0}^{N} (x - x_i)| \leq \frac{\|f^{(N+1)}\|}{(N+1)!} |b-a|^{N+1}$$

   d) Define un polinomio de Newton $q(x)$ tal que
$$\|f(x) - q(x)\|_\infty \leq \epsilon(b-a)$$
$$q(x) = f(a) + \int_a^x p(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

   e) Escribe $q(x)$ en función de $f'(x) - p(x)$.
$$q(x) = f(x) - \int_a^x (f'(t) - p(t))\, dt$$

f) Escriba una fórmula exacta para el error entre $q(x)$ a $f(x)$ en la malla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$.

$$q(x) - f(x) = -\int_a^x \prod_{i=0}^{N} (t - x_i) f[x_0, x_1, \ldots, x_N, t]\, dt$$

2. Considere el método multipaso parametrizado

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + y_{n-1}) + \frac{h}{4}(\beta\, f_{n+1} - f_n + \alpha\, y_{n-1}).$$

a) Para qué valores de α y β es consistente dicho método

$$\alpha = -5 - \beta$$

b) Para qué valores de α y β la constante que multiplica el término principal del error de truncado es 0,001 (multiplicado por una derivada y una potencia de h)

$$\alpha = -\frac{2003}{1000}, \qquad \beta = -\frac{2997}{1000},$$

c) Para qué valores de α y β se obtiene el orden de consistencia más alto

$$\alpha = -2, \qquad \beta = -3.$$

d) Cuál es el término principal del error de truncado de este método (el de mayor orden)

$$y_n' = f_n + T.E.T. = f_n + \frac{h^2}{4} y^{(3)}(\xi).$$

e) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) de este método

$$p(r, h\lambda) = \frac{-1}{2} - \frac{r}{2} + r^2 - \frac{h\lambda}{4}\left(2 + r + 3\, r^2\right),$$

f) Es fuertemente estable este método

SI

g) Escriba el desarrollo de Taylor de las dos raíces del polinomio característico (o de estabilidad) hasta tercer orden (incluido) en $h\lambda$.

$$r_p = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{5\,(h\lambda)^3}{12} + O\Big((h\lambda)^4\Big)\,,$$
$$r_s = -\frac{1}{2} - \frac{3\,h\lambda}{8} - \frac{(h\lambda)^2}{32} - \frac{25\,(h\lambda)^3}{384} + O\Big((h\lambda)^4\Big)\,.$$

h) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

SI, para $h\lambda < 0$

i) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

NO, $\qquad h\lambda \in (-\infty, \frac{6}{23}\left(1 + 2\sqrt{6}\right))$

j) ¿Cuál es el límite para $h\lambda \to \infty$ de los módulos de las raíces del polinomio característico?

$$\lim_{h\lambda\to\infty} |r_p| = \lim_{h\lambda\to\infty} |r_s| = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165$$

3. Resuelva el siguiente problema de valores en el contorno

$$x'' + 2\,x' + 10\,t = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(1) = 2,$$

para $x(1/2)$ mediante diferencias finitas con tamaño de malla $h = 1/4$.

a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0, 0, 0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

4. Calcule la factorización QR de Householder de la matriz

$$\begin{pmatrix} 63 & 41 & -88 \\ 42 & 60 & 51 \\ 0 & -28 & 56 \\ 126 & 82 & -71 \end{pmatrix}.$$

a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0, 0, 0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.