

Examen Segundo Parcial (TIPO D) Técnicas Numéricas (Téc. Comp.)
Nombre del Alumno: DNI:

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas PUNTUACIÓN DE PROBLEMAS: 5, 5.

1. Para calcular la integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

podemos utilizar una regla de integración gaussiana basada en polinomios ortogonales de Chebyshev.

a) Escriba la función peso y el intervalo en que están definidos los polinomios de Chebyshev

b) Para usar una regla de integración gaussiana tiene que cambiar el intervalo, especifique el cambio de variable y la nueva integral

c) Escriba la expresión de una regla de integración gaussiana con 4 nodos basada en polinomios de Chebyshev aplicada a la integral en el intervalo $[a, b]$ (deje el peso y los nodos arbitrarios)

d) Hasta polinomios de qué grado será exacta la anterior fórmula de integración

- e) Sabiendo que la función generadora de los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ es

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

calcule el polinomio cuyos ceros dan los nodos en la anterior fórmula gaussiana (normalice para $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$),

- f) Calcule los ceros del polinomio del apartado anterior
- g) Falta por calcular los pesos. ¿Cuántas ecuaciones tiene que escribir? ¿Puede obtener dichas ecuaciones suponiendo que la fórmula de integración sea exacta para polinomios de Chebyshev?.
- h) En caso afirmativo, escriba los polinomios de Chebyshev que tiene que utilizar para calcular dichas ecuaciones

2. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x, y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12} (y''_n - y''_{n+1}), \quad n \geq 0,$$

- a) ¿Cómo calcularía y'_n y y''_n a partir de f ?
- b) Determine el término principal del error de truncado de este método
- c) ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?
- d) Determine el polinomio característico de este método.
- e) Calcule las raíces de este polinomio característico.
- f) Escriba el desarrollo Taylor de la raíz principal hasta quinto orden en $h\lambda$.
- g) ¿Es fuertemente estable este método?

- h)* ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional
- i)* ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

FECHA Y FIRMA