Examen Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Mayo de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Para calcular la integral
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$
podemos utilizar una regla de integración gaussiana basada en polinomios ortogonales de Chebyshev.

   a) Escriba la función peso y el intervalo en que están definidos los polinomios de Chebyshev
$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad I = [-1, 1]$$

   b) Para usar una regla de integración gaussiana tiene que cambiar el intervalo, especifique el cambio de variable y la nueva integral
$$y = \frac{a+b}{a-b} - \frac{2}{a-b}x = \frac{a+b}{a-b} + \frac{2}{b-a}x,$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y)\,dy$$

   c) Escriba la expresión de una regla de integración gaussiana con 4 nodos basada en polinomios de Chebyshev aplicada a la integral en el intervalo $[a, b]$ (deje el peso y los nodos arbitrarios)
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{5} w_n f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y_n),$$

   d) Hasta polinomios de qué grado será exacta la anterior fórmula de integración

Hasta polinomios de grado 7

e) Sabiendo que la función generadora de los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ es

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

calcule el polinomio cuyos ceros dan los nodos en la anterior fórmula gaussiana (normalice para $T_n(1)=1$, $T_n(-1)=(-1)^n$),

$$T_4(y) = 8\,y^4 - 8\,y^2 + 1.$$

f) Calcule los ceros del polinomio del apartado anterior

$$y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad y_4 = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

g) Falta calcular los pesos. ¿Cuántas ecuaciones tiene que escribir? ¿Puede obtener dichas ecuaciones suponiendo que la fórmula de integración sea exacta para polinomios de Chebyshev?.

4, SI

h) En caso afirmativo, escriba los polinomios de Chebyshev que tiene que utilizar para calcular dichas ecuaciones

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

2. Para la resolución de la ecuación $y' = f(x,y)$ considere el método

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n+1}) + \frac{h^2}{12}\,(y''_n - y''_{n+1}), \qquad n \geq 0,$$

a) ¿ Cómo calcularía y'_n y y''_n a partir de f ?

$$y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y''_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n).$$

b) Determine el término principal del error de truncado de este método

$$y'_n = f_n + T.E.T. = f_n - \frac{h^4}{720}\, y_n^{(5)}(\xi),$$

c) ¿Cuál es el orden de consistencia de este método?

cuarto

d) Determine el polinomio característico de este método.

$$p(r, h\lambda) = \left(1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}\right) r - \left(1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}\right),$$

e) Calcule las raíces de este polinomio característico.

$$r = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}}{1 - \frac{h\lambda}{2} + \frac{(h\lambda)^2}{12}}$$

f) Escriba el desarrollo Taylor de la raíz principal hasta quinto orden en $h\lambda$.

$$r = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^3}{6} + \frac{(h\lambda)^4}{24} + \frac{(h\lambda)^5}{144} + O\Big((h\lambda)^6\Big).$$

g) ¿Es fuertemente estable este método?

SI

h) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

SI, para $h\lambda < 0$

i) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

SI, no tiene raíces espurias,

3. Aplique el método de Elementos Finitos cG(3), que usa polinomios cúbicos a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$. Calcule la matriz de coeficientes y el vector no homogéneo del sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes de la solución. ¿Cómo es la matriz que obtiene?

   a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0, 0, 0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

4. Para la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

dibuje (aproximadamente) los discos de Gershgorin y encuentre una cota para su radio espectral. ¿Cómo determinaría una cota superior y otra inferior para el radio espectral de una matriz utilizando su norma 1? Aplique su respuesta a la matriz del enunciado.

   a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0, 0, 0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.