Examen Segundo Parcial — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)
Profesor Francisco R. Villatoro — 29 de Mayo de 2000
NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA
NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Para calcular la integral
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$
podemos utilizar una regla de integración gaussiana basada en polinomios ortogonales de Legendre.

   a) Escriba la función peso y el intervalo en que están definidos los polinomios de Legendre
   $$w(x) = 1 \qquad\qquad I = [-1, 1]$$

   b) Para usar una regla de integración gaussiana tiene que cambiar el intervalo, especifique el cambio de variable y la nueva integral
   $$y = \frac{a+b}{a-b} - \frac{2}{a-b}x = \frac{a+b}{a-b} + \frac{2}{b-a}x,$$
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y)\,dy$$

   c) Escriba la "formaüna regla de integración gaussiana con 5 nodos basada en polinomios de Legendre aplicada a la integral en el intervalo $[a, b]$ (deje el peso y los nodos arbitrarios)
   $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{5} w_n f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}y_n),$$

   d) Hasta polinomios de qué grado será exacta la anterior fórmula de integración

   Hasta polinomios de grado 9

e) Utilizando la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre (con $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, calcule el polinomio cuyos ceros dan los nodos en la anterior fórmula gaussiana

$$P_n(y) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} (y^2 - 1)^n.$$

$$P_5(y) = \frac{15}{8}\, y - \frac{35}{4}\, y^3 + \frac{63}{8}\, y^5$$

f) Calcule los ceros del polinomio del apartado anterior

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}}{3}, \qquad y_3 = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}}{3},$$

$$y_4 = -\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}}{3}, \qquad y_5 = -\frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}}{3},$$

g) Faltan calcular los pesos. ¿Cuántas ecuaciones tiene que escribir? Puede obtener dichas ecuaciones suponiendo que la fórmula de integración sea exacta para polinomios de Legendre.

5, SI

h) En caso afirmativo, escriba los polinomios de Legendre que tiene que utilizar para calcular dichas ecuaciones

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3\,x^2}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{-3\,x}{2} + \frac{5\,x^3}{2}, \qquad P_4(x) = \frac{3}{8} - \frac{15\,x^2}{4} + \frac{35\,x^4}{8}$$

2. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y(x)),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector ($P(EC)^n$).

a) Escriba un método PEC con predictor un método de Euler explícito y como corrector una regla del trapecio

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})\right),$$

b) Determine el término principal del error de truncado del método completo (predictor sustituido en el corrector)

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{f(y(x))\, f'(y(x))^2}{6} - \frac{f(y(x))^2\, f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{y'(x)\, y''(x)^2}{6} - \frac{y'(x)^2\, y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

c) ¿Cuál es el orden de consistencia del corrector? ¿y del método completo?

2, segundo para los dos

d) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

e) ¿Cuántas raíces espurias tiene este método numérico?

ninguna

f) Escriba el desarrollo de Taylor de la raíz principal hasta $O((h\lambda)^5)$

$$r = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

g) ¿Es fuertemente estable este método?

SI

h) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

NO, $\qquad h\lambda \in [-2, 0]$

i) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

$$\text{SI}, \qquad h\lambda \in (-\infty, \infty)$$

j) Considere un método $PECEC$ (donde se aplica dos veces el corrector). Determine el término principal del error de truncado del método completo

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{-\left(f(y(x))\, f'(y(x))^2\right)}{12} - \frac{f(y(x))^2\, f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{-\left(y'(x)\, y''(x)^2\right)}{12} - \frac{y'(x)^2\, y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

k) ¿Cuál es el orden de consistencia del nuevo método completo?

$$2, \text{ segundo orden}$$

l) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2} - \frac{(h\lambda)^3}{4}$$

m) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

$$\text{NO}, \qquad h\lambda \in [-2, 0]$$

n) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

$$\text{SI}, \qquad h\lambda \in (-\infty, \infty)$$

3. Vamos a aplicar el método de Elementos Finitos basado en polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\, u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$u'(0) = 1, \qquad a(1)\, u'(1) + u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$.

a) Escriba una malla no uniforme para este problema

b) Escriba la definición del espacio de polinomios lineales a trozos continuos $V_h^{(1)}$

c) Escriba una base del espacio $V_h^{(1)}$

d) Escriba el desarrollo de una función perteneciente a $V_h^{(1)}$

e) Escriba la formulación de Galerkin continua de nuestro problema

f) Escriba la formulación variacional continua de nuestro problema

g) Escriba la formulación variacional discreta de nuestro problema *h*) Determine los coeficientes de la primera fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

i) Determine los coeficientes de la segunda fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

j) Determine los coeficientes de la última fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

4. En el método de la potencia se puede determinar el autovalor de mayor módulo calculando el tamaño de los vectores $x^{(k)}$ mediante un funcional $\phi(x)$ lineal (por ejemplo, una norma o alguna de las componentes). De esta forma podemos escribir los cocientes

$$r_k = \frac{\phi\big(x^{(k+1)}\big)}{\phi\big(x^{(k)}\big)},$$

que tienden a λ_1 cuando $k \to \infty$. Demuestre que los errores relativos cumplen con

$$\frac{r_k - \lambda_1}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k c_k,$$

donde los números c_k forman una sucesión convergente (y por tanto acotada).

Demuestre que $r_{k+1} - \lambda_1 = (c + \delta_k)\,(r_k - \lambda_1)$, donde $|c| < 1$ y $\delta_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Es decir, demuestre que la iteración r_k converge linealmente a λ_1.

a) Determine todos sus puntos críticos.

$$(0,0,0), \qquad (-8/21, -8/49, -40/147)$$

PUNTUACIÓN DE LOS APARTADOS: 1, 2, 3, 1, 3.