SOLO SEGUNDO PARCIAL — Técnicas Numéricas (Técn. Comp.)

Profesor Francisco R. Villatoro — 9 de Septiembre de 2000

NO SE PERMITEN APUNTES, FORMULARIOS O CALCULADORA

NO OLVIDE RACIONALIZAR TODOS LOS RESULTADOS

DURACIÓN 3:30 horas

1. Para la resolución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(y(x)),$$

se puede utilizar el método predictor-corrector ($P(EC)^n$).

a) Escriba un método PEC con predictor un método de Euler explícito y como corrector una regla del trapecio

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h f(y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n) + f(\tilde{y}_{n+1})\right),$$

b) Determine el término principal del error de truncado del método completo (predictor sustituido en el corrector)

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{f(y(x))\, f'(y(x))^2}{6} - \frac{f(y(x))^2\, f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{y'(x)\, y''(x)^2}{6} - \frac{y'(x)^2\, y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

c) ¿Cuál es el orden de consistencia del corrector? ¿y del método completo?

2, segundo para los dos

d) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

e) ¿Cuántas raíces espurias tiene este método numérico?

ninguna

f) Escriba el desarrollo de Taylor de la raíz principal hasta $O((h\lambda)^5)$

$$r = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$$

g) ¿Es fuertemente estable este método?

SI

h) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

NO, $\qquad h\lambda \in [-2, 0]$

i) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

SI, $\qquad h\lambda \in (-\infty, \infty)$

j) Considere un método $PECEC$ (donde se aplica dos veces el corrector). Determine el término principal del error de truncado del método completo

$$\begin{aligned} y' - f(y) = TET &= \frac{-\left(f(y(x))\, f'(y(x))^2\right)}{12} - \frac{f(y(x))^2\, f''(y(x))}{12} \\ &= \frac{-\left(y'(x)\, y''(x)^2\right)}{12} - \frac{y'(x)^2\, y^{(3)}(x)}{12}, \end{aligned}$$

k) ¿Cuál es el orden de consistencia del nuevo método completo?

2, segundo orden

l) Determine el polinomio característico (o de estabilidad) para el método numérico completo.

$$p(r, h\lambda) = r - 1 - h\lambda - \frac{(h\lambda)^2}{2} - \frac{(h\lambda)^3}{4}$$

m) ¿Es incondicionalmente, absolutamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad absoluta condicional

$$\text{NO}, \qquad\qquad h\lambda \in [-2, 0]$$

n) ¿Es incondicionalmente, relativamente estable este nuevo método? Si no lo es, determine su intervalo de estabilidad relativa condicional

$$\text{SI}, \qquad\qquad h\lambda \in (-\infty, \infty)$$

2. Vamos a aplicar el método de Elementos Finitos basado en polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$u'(0) = 1, \qquad a(1)\,u'(1) + u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$.

a) Escriba una malla no uniforme para este problema

b) Escriba la definición del espacio de polinomios lineales a trozos continuos $V_h^{(1)}$

c) Escriba una base del espacio $V_h^{(1)}$

d) Escriba el desarrollo de una función perteneciente a $V_h^{(1)}$

e) Escriba la formulación de Galerkin continua de nuestro problema

f) Escriba la formulación variacional continua de nuestro problema

g) Escriba la formulación variacional discreta de nuestro problema

h) Determine los coeficientes de la primera fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

i) Determine los coeficientes de la segunda fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

j) Determine los coeficientes de la última fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene