LOS DOS PARCIALES — Técnicas Numéricas (y Comp.)

Duración 3:30 horas — 9 de Septiembre de 2000

NO SE PERMITEN NI APUNTES NI CALCULADORA (OPERE A MANO).

1. Dada una función $f(x)$ de la que sólo se conocen sus valores $f(x_n)$ en una malla discreta $\{x_n\}_0^m$.

   a) Cúal es la expresión general de la aproximación de $f(x)$ mediante una combinación lineal de funciones (linealmente independientes).

   b) ¿Cuál es la norma que determina adecuada para medir el error en la aproximación mínimo-cuadrática de este problema?

   c) Detalle la ecuación de punto estacionario para este problema.

   d) Escribe el sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes de la combinación lineal del apartado (a).

   e) Suponga que busca un polinomio cuadrático de aproximación y que cuenta con seis nodos. Cuál es el sistema de ecuaciones que obtiene.

   f) ¿Está bien condicionado dicho sistema de ecuaciones?

   g) ¿Cómo resolvería dicho sistema de ecuaciones?

   h) Para $x_n = 10 + \frac{n-1}{5}$, determine los valores numéricos de la matriz de dicho sistema de ecuaciones.

   i) Calcule la norma infinito de dicha matriz.

   j) ¿Cómo estimaría la norma infinito de su inversa?

   k) Estime la norma infinito de su inversa.

   l) Calcule el número de condicionamiento de dicha matriz.

   Solución. Dada una función $f(x)$ se puede aproximar por una combinación lineal de funciones (linealmente independientes)

   $$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, \phi_i(x).$$

   La mejor aproximación mínimo cuadrática determina parámetros a_i tales que minimizan la norma L_2 de la diferencia

   $$\min \|f(x) - \tilde{f}(x)\|_2.$$

En el caso de que sólo conocemos los valores de f en una malla discreta $\{x_n\}$, podemos aproximar la norma L_2 por la norma discreta l_2, y minimizar

$$\text{mín} \sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_i(x_n) \right)^2 .$$

Que un punto sea mínimo implica que es estacionario, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_i(x_n) \right)^2 \right) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m,$$

es decir,

$$-2 \sum_{n=1}^{N} \phi_j(x_n) \left(f(x_n) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi(x_n) \right) = 0,$$

con lo que obtenemos el sistema lineal de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_j(x_n) \, f(x_n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=0}^{m} a_i \, \phi_j(x_n) \, \phi_i(x_n), \qquad j = 0, \ldots, m.$$

En nuestro caso, para un polinomio cuadrático

$$m = 2, \qquad \phi_0 = 1, \quad \phi_1 = x, \quad \phi_2 = x^2,$$

y para los 6 puntos

$$x_n = 10 + \frac{n-1}{5}, \qquad n = 1, 2, \ldots, 6,$$

tenemos que resolver el sistema lineal simétrico

$$\left(\begin{array}{ccc} \sum_{n=1}^{6} \phi_0^2(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n) \, \phi_1(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n) \, \phi_2(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n) \, \phi_0(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_1^2(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n) \, \phi_2(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n) \, \phi_0(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n) \, \phi_1(x_n) & \sum_{n=1}^{6} \phi_2^2(x_n) \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n) \, f(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n) \, f(x_n) \\ \sum_{n=1}^{6} \phi_2(x_n) \, f(x_n) \end{array} \right).$$

Operando

$$\sum_{n=1}^{6} \phi_0^2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} 1 = 6,$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_1(x_n) &= \sum_{n=1}^{6} x_n = \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right) \\ &= \left.\frac{N\,(N+99)}{10}\right]_{N=6} = 63,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6} \phi_1^2(x_n) &= \sum_{n=1}^{6} \phi_0(x_n)\,\phi_2(x_n) = \sum_{n=1}^{6} x_n^2 = \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^2 \\ &= \left.\frac{N\,(14701 + 297\,N + 2\,N^2)}{150}\right]_{N=6} = \frac{3311}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6} \phi_1(x_n)\,\phi_2(x_n) &= \sum_{n=1}^{6} x_n^3 = \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^3 \\ &= \left.\frac{N\,(99+N)\,(4900 + 99\,N + N^2)}{500}\right]_{N=6} = \frac{34839}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6} \phi_2^2(x_n) &= \sum_{n=1}^{6} x_n^4 = \sum_{n=1}^{6} \left(10 + \frac{n-1}{5}\right)^4 \\ &= \left.\frac{N\,(180074999 + 7276500\,N + 147010\,N^2 + 1485\,N^3 + 6\,N^4)}{18750}\right]_{N=6} \\ &= \frac{45870979}{625},\end{aligned}$$

y donde los valores del término independiente no los podemos calcular al no conocer los valores de $f(x_n)$.

De esta forma obtenemos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 63 & 662{,}2 \\ 63 & 662{,}2 & 6967{,}8 \\ 662{,}2 & 6967{,}8 & 73393{,}6 \end{pmatrix},$$

que está mal condicionada. Por ejemplo, su norma infinito

$$\|A\|_\infty = 80923{,}6,$$

y estimando la norma infinito de su inversa mediante

$$\|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{\|x\|_\infty}{\|A\,x\|_\infty},$$

mediante un vector cualquiera, sea

$$x = \begin{pmatrix} 10{,}07 \\ -2 \\ 0{,}099 \end{pmatrix}, \qquad A\,x = \begin{pmatrix} -0{,}02 \\ -0{,}18 \\ -1{,}28 \end{pmatrix}, \qquad \|A^{-1}\|_\infty \geq \frac{10{,}07}{1{,}28} = 7{,}8,$$

con lo que

$$\kappa(A) = \|A\|_\infty\,\|A^{-1}\|_\infty \geq 7{,}8 \times 80923{,}6 = 631204 \gg 1,$$

por lo que hay que tener mucho cuidado en cómo se invierte. En cualquier caso, la solución de nuestro problema es $a = A^{-1}\,b$.

Este ejercicio ilustra las ventajas de utilizar polinomios (o funciones) ortogonales (en nuestro caso, l_2-ortogonales) en la minimización mínimo-cuadrática ya que en dicho caso

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_i(x_n)\,\phi_j(x_n) = 0, \qquad i \neq j,$$

con lo que la matriz será diagonal y definida positiva.

2. Vamos a aplicar el método de Elementos Finitos basado en polinomios lineales a trozos continuos, para resolver el problema

$$-(a(x)\,u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$u'(0) = 1, \qquad a(1)\,u'(1) + u(1) = 0,$$

donde $a(x) = 1 + x$ y $f(x) = \sin(x)$.

   a) Escriba una malla no uniforme para este problema *b*) Escriba la definición del espacio de polinomios lineales a trozos continuos $V_h^{(1)}$

c) Escriba una base del espacio $V_h^{(1)}$

d) Escriba el desarrollo de una función perteneciente a $V_h^{(1)}$

e) Escriba la formulación de Galerkin continua de nuestro problema

f) Escriba la formulación variacional continua de nuestro problema

g) Escriba la formulación variacional discreta de nuestro problema

h) Determine los coeficientes de la primera fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene *i*) Determine los coeficientes de la segunda fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

j) Determine los coeficientes de la última fila del sistema de ecuaciones lineales que obtiene

PUNTUACIÓN =