Cuarta práctica voluntaria
Profesor Francisco R. Villatoro

Técnicas Numéricas
7 de Diciembre de 1999

El objetivo de esta práctica es estudiar la convergencia de algoritmos iterativos de resolución numérica de ecuaciones algebraicas no lineales cuando la condición inicial no está suficientemente cerca de una raíz.

1. Se puede resolver la ecuación polinómica $p(z) = 0$ utilizando el método de Newton
$$z_{n+1} = g(z_n) = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \qquad z_0 \in \mathbb{C}.$$
Si el método de Newton converge $z_n \to \xi$, decimos que el punto inicial z_0 es atraído hacio el punto ξ; se toma $\xi = \infty$ cuando el método diverge. El conjunto de todos los puntos atraídos hacia ξ se denomina su cuenca de atracción. Dado un polinomio, cada una de sus raíces tiene una cuenca de atracción disjunta de las demás. Se denomina conjunto de Julia (Gaston Julia, 1918) a la cuenca de atracción de ∞. Cuando las raíces de p son simples, las cuencas de atracción son conjuntos abiertos y el conjunto de Julia es la frontera de cada una de estas cuencas y, sorprendentemente, también de todas ellas. Un conjunto con estas propiedades tiene una dimensión no entera (entre 1 y 2) y es fractal.

   El polinomio $p(z) = z^3 - 1$ tiene tres raíces complejas simples (¿cuáles?). Si un punto z_n está a una distancia menor que $0'25$ de cualquiera de las raíces entonces converge cuadráticamente a ésta (demuestrelo). Las tres cuencas de atracción de sus raíces se pueden dibujar fácilmente:

```
I=sqrt(-1);
z1 = 1;
z2 = (-1 + sqrt(3)*I)/2;
z3 = (-1 - sqrt(3)*I)/2;

xmin=-1.; xmax=1.; dx = (xmax-xmin)/499; x = xmin:dx:xmax;
ymin=-1.; ymax=1.; dy = (ymax-ymin)/499; y = ymin:dy:ymax;

z = ones(size(y))'*x + I*y'*ones(size(x));
```

```
for i=1:20; z = z - (z.^3-1)./(3*z.^2); end

zz1 = zeros(size(z)); zz1 ( find ( abs(z-z1)<0.25 ) )=1;
zz2 = zeros(size(z)); zz2 ( find ( abs(z-z2)<0.25 ) )=1;
zz3 = zeros(size(z)); zz3 ( find ( abs(z-z3)<0.25 ) )=1;

clf; spy(zz1, 'r'); hold on; spy(zz2, 'y'); spy(zz3, 'b');
```

NOTA: Si tiene una máquina lenta, cambie 499 por 199.

¿Qué color corresponde a cada cuenca de atracción? Amplie la región el plano complejo $[0{,}3, 0{,}5]^2$ y compruebe que el conjunto de Julia es fractal (similar a sí mismo a diferentes escalas).

2. Cuando z es una raíz de multiplicidad k-ésima de $p(z)$ podemos aplicar un método de Newton con relajación

$$z_{n+1} = g(z_n, \lambda) = z_n - \lambda \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}, \qquad z_0 \in \mathbb{C},$$

utilizando $\lambda = k$. Demuestre que en ese caso el método es aplicable y su convergencia es cuadrática. Compruebe que este método se puede intrepretar como la aplicación del método de Euler explícito a la ecuación diferencial

$$p'(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} + p(z(t)) = 0, \qquad z(0) = z_0.$$

Integre esta ecuación diferencial mediante el método numérico `ode45` de Matlab (haga `help ode45` para aprender a usar esta función) y dibuje una gráfica con las soluciones $z(t)$ superpuestas tomando para z_0 todas y cada una de las 16 raíces complejas de 2 ($2^{1/16}$). ¿Cómo son las trayectorias? ¿En qué se parecen al conjunto de Julia del apartado anterior?

3. Considere el método de la secante. Determine un entorno alrededor de cada una de las raíces que garantice para una condición inicial en dicho entorno que el método de la secante converge a dicha raíz. Utilizando dicho entorno, represente las cuencas de atracción asociadas el método de la secante. ¿Cómo son las cuencas de atracción de este método? ¿Se parecen a las de Newton? Justifique sus respuestas.

4. Barna (1956) ha demostrado que para polinomios reales con sólo raíces reales, el método de Newton converge a una raíz, para casi cualquier valor inicial tomado en $\mathbb{R}$ (salvo un conjunto de medida nula). Para $z^3 - 1$ en el plano complejo hemos observado lo mismo en el apartado primero. Consideremos otro polinomio

$$p(z) = (z-1)(z^2+z+1/2), \qquad z \in [-2'46, 1'71] \times [-0'28, 0'28]\,\mathrm{i}\,.$$

Determine sus tres raíces y el radio de un entorno en cada una de ellas que garantice que el método de Newton converge para z_0 en dicho entorno. Utilizando estos datos, cambie el programa utilizado en el apartado 1 para que represente las cuencas de atracción de las tres raíces de este polinomio.

5. Coloreando las regiones delimitadas por los conjuntos de Julia en función del número de iteraciones necesarios para garantizar la convergencia se puden obtener figuras fractales muy "bonitas". Por ejemplo, para el polinomio del problema anterior (complete el código):

```
xmin=-2.46; xmax=-1.8; ymin=-0.23; ymax=0.23;
...
for i=1:20; z = ...
 zz1( find (abs(z-z1)<0.25) )= zz1( find (abs(z-z1)<0.25))+1;
 zz2( find (abs(z-z2)<0.25) )= zz2( find (abs(z-z2)<0.25))+1;
 zz3( find (abs(z-z3)<0.25) )= zz3( find (abs(z-z3)<0.25))+1;
end

mm = max(max(zz2)); zz1 = zz1+mm; zz1( find(zz1==mm) ) = 0;
zz = zz1 + zz2 + zz3;

col1 = [  0.3 0.3 0.1 ; 1 1 0 ; 0.8 0.5 0.1 ];
col = [ col1 ; col1 ]; col = [ col ; col ];col = [ col ; col1 ];
col2 = [ 0 1 1 ; 0.7 0.9 0.9 ];
col1 = [ col2 ; col2 ]; col1 = [ col1 ; col1 ];
col = [ col ; col1 ; col2 ];

pcolor(zz); colormap (col); shading interp;
```

¿Cómo alteraría la figura anterior para que pareciera una çaraçon dos ojos (amarillos) arriba y una boca (azul) abajo?

NOTA: Existen contraejemplos del teorema de Barna en el plano complejo. Estos ejemplos están basados en polinomios parametrizados cuyos parámetros se encuentran en la frontera de sus correspondientes conjuntos del Mandelbrot. No entraremos en más detalles.

6. Consideremos el método de punto fijo

$$z_{n+1} = g_m(z_n) = g(g_{m-1}(z)) = \underbrace{g(g(\cdots(g}_{m}(z)))),$$

$$g_1(z_n) = g(z_n) = z_n^2 + c, \qquad z_0 = 1.$$

¿Qué relación hay entre el método con g_1 y el método con g_m general? La convergencia de este método iterativo depende de $c \in \mathbb{R}$. Utilizando el teorema del punto fijo estudiado en clase, estudie la convergencia en función de c para g_1, g_2, g_3 y g_4. Estos métodos convergen en $0 > c > c_m$. Compruebe que $c_1 = c_3 > c_2 > c_4$. ¿Cómo interpreta este comportamiento?

7. ¿Cómo determinaría numéricamente en Matlab el valor de c_m para el método del apartado anterior? Dibuje una gráfica con c_m en función de m. ¿Cómo es el cociente de c_m/c_{2m} conforme m crece? NOTA: la constante universal de Feigenbaum es 4,669201 . . .

8. El intervalo $[c_2, c_1]$ se denomina ventana de soluciones de periodo 2, y el intervalo $[c_4, c_2]$, ventana de periodo 4. ¿Por qué crees que reciben estos nombres? Vamos a representar (de forma aproximada) el diagrama de bifurcación de la aplicación $g(z)$:

```
for m=[1:5,20,100], c=0:-.01:-2; zc = zeros(length(c),m);
 for j=1:length(c); z = 1; cc=c(j);
  for i=1:100, z = z.^2 + cc; end
  for i=1:m, z = z.^2 + cc; zc(j,i)=z; end
 end
 clf; for i=1:m,  plot(c,zc(:,i),'.');  hold on; end
 hold off; pause
end
```

Comente las figuras que observas conforme m crece. Determine una ventana de periodo 3 en la región $c \in [-1{,}7, -1{,}8]$ (cambia el bucle `i=1:100` a `i=1:1000` para verla mejor). NOTA: El tipo de bifurcación mostrado en el diagrama se denomina por doblamiento de periodo y se puede demostrar que tiene ventanas con periodo infinito, que se denominan ventanas caóticas.

9. Vamos a pasar al plano complejo. Consideremos el método iterativo

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \qquad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Sea $c = 0$; para $|z_0| < 1$, el método converge a 0; para $|z_0| > 1$, el método diverge; y para $|z_0| = 1$, $|z_n| = 1$. Se dice que 0 es un atractor del conjunto $|z_0| < 1$, cuya frontera es un círculo. Compruebe dicho resultado con el siguiente código:

```
I=sqrt(-1); dx=.01;   Rez = -1.4:dx:1.4; Imz = -1.2:dx:1.2;
z0 = ones(length(Imz),1)*Rez + I * Imz’ * ones(1,length(Rez));
colores = ’rgbcmy’;

c=0; per=1; pause; z = z0;

for i=1:3; z = z.^2 + c; end
for i=1:15; z = z.^2 + c;
 z( find (z>1000) ) = 0; sparse(z);
 zz = z; zz(find(abs(z)>2))=0;  zz(find(abs(z)<0.8))=0;
 if (mod(i,per)==1), hold off; end
 spy(zz,colores(mod(i,per)+1)); hold on;
 if (mod(i,per)==0), pause; end
end
```

NOTA: Antes de pulsar una tecla (en la primera pausa) maximice la ventana de la figura para verla mejor.

Explique qué es lo que debería ver en las diferentes figuras y que es lo que realmente ve, y por qué. Cambie el código para trabajar con el punto `c=-1` y `per=2`. Explique qué es lo que ve. El contorno que observa tiene una forma auto-similar y se denomina curva fractal (tiene una dimensión mayor que 1 pero menor que 2). Pruebe ahora con el punto `c=I`. ¿Qué es lo que ve? Esta figura se denomina dendrita. Pruebe ahora con el punto `c=-0.12375 + 0.56508*I`. Otros tipos de conjuntos de puntos se obtienen tomando, por ejemplo, `c=-0.12 + 0.74*I` y `per=3`; observará la cuenca de atracción de un ciclo de periodo 3. ¿Por qué? Finalmente, pruebe con el punto `c=-0.481762 -0.531657*I` y $per = 5$. ¿Observa la cuenca de atracción de un ciclo de periodo mayor que 3?. ¿Cuál es este periodo?

NOTA: Esos conjuntos son conjuntos de Julia (¡bueno!, más o menos, ¿por qué?).

10. Las características topológicas de los conjuntos de Julia vienen dados por la pertenencia, o no, del punto c al conjunto de Mandelbrot, que representamos a continuación (note que consideramos que un punto diverge si su módulo es mayor que 100, lo que es una aproximación):

```
dx=.01; Rez = -2.4:dx:0.8; Imz = -1.2:dx:1.2; per=5; I=sqrt(-1);
c = ones(length(Imz),1)*Rez + I * Imz' * ones(1,length(Rez));

z=c; zz=c; clf;

for i=1:per*5;
 z = z.^2 + c;
 if (mod(i,per)==0),
  zz = z;  zz(find(abs(z)>100))=0;
  zz(find(isnan(z)))=0;  spy(zz); pause,
 end
end
```

Esboce el dibujo del conjunto de Mandelbrot y dibuje con recuadros las zonas que se amplian (zoom) si se utilizan los siguientes puntos:

```
dx=.00025; Rez = -0.19920:dx:-0.12954; Imz = 1.01480:dx:1.06707; per=6;

dx=.000025; Rez = -0.75104:dx:-0.7408; Imz = 0.10511:dx:0.11536; per=20;

dx=.000025; Rez = -1.781:dx:-1.764; Imz = 0:dx:0.013; per = 10;
```

NOTA: Las propiedades de los conjuntos de Julia dependen de dónde esté el valor de c correspondiente en el conjunto de Mandelbrot. Si está en su frontera, o si está en alguno de sus satélites. No daremos más detalles.