Séptima práctica voluntaria — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 2 de Abril de 2001

FECHA DE ENTREGA: Lunes, 23 de Abril de 2001

ENUNCIADO DE LA SÉPTIMA PRÁCTICA (PUNTUACIÓN: 0.3)

Problemas stiff*: el oscilador de relajación de van der Pol.*

El oscilador de van der Pol es un circuito eléctrico formado por una resistencia no lineal, una válvula de vacío (D), acoplada a una resistencia (R), un condensador (C) y una bobina (L), formando un oscilador RLC. Llamaremos I_D, I_R, I_C e I_L, a la corriente a su paso por estos elementos, respectivamente.

La curva intensidad/voltaje (I/V) de una válvula de vacío modela esta componente como una resistencia no lineal. El modelo estándar es un polinomio cúbico

$$I_D = -\alpha\, V + \gamma\, V^3,$$

donde I_D y V son la corriente y el voltaje sobre la válvula, y α y γ son parámetros que se pueden obtener experimentalmente por regresión numérica de la curva I/V (o mediante un modelo teórico adecuado).

1. Dibuje el circuito eléctrico del oscilador de van der Pol sabiendo que el voltaje aplicado a todos los elementos es el mismo (V_a), y que $I_D + I_R = I_C + I_L$. Obtenga la ecuación diferencial para las oscilaciones en dicho circuito en función de V_a. Adimensionalice dicha ecuación. ¿Cuál es la ecuación que obtiene?

2. Debe obtener la ecuación de van der Pol

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \mu\,(1 - V^2)\,\frac{dV}{dt} + V = 0;$$

¿cuánto vale μ? Linealice dicha ecuación y escriba la solución (lineal) general. ¿Cuándo $V(t) = \cos t$ es solución de dicha ecuación? Aplique variación de parámetros sobre dicha solución, es decir, suponga $V(t) = a(t)\cos(t)$, y obtenga una ecuación diferencial para $a(t)$. Resuelva dicha ecuación diferencial, y demuestre que para $\mu < 0$ (resistencia "negativa") se realizan oscilaciones no lineales estacionarias con amplitud adimensional 2.

3. Para resistencia "negativa" ($\mu < 0$ y $|t| < 1$) la solución inicial trivial ($V \equiv 0$) es inestable. Demuéstrelo. Sin embargo, para $|t| > 1$, la resistencia vuelve a ser positiva, con lo que las amplitudes muy grandes son amortiguadas. Por ello, la solución no lineal oscila. Cuando $\mu \gg 1$, la solución oscilatoria se caracteriza por transiciones rápidas ($\Delta t = O(1/\mu)$) seguidas por fases lentas ($\Delta t = O(\mu)$). Se denomina oscilaciones de relajación a este tipo de comportamiento. En general, las ecuaciones no lineales con soluciones oscilatorias de este tipo se dice que tienen ciclos límite.

4. ¿Cómo son los autovalores de la ecuación de van der Pol linealizada en función de μ? ¿Espera que sea un problema numéricamente "stiff"? Demuestre que cuando μ aumenta, el problema se vuelve más "stiff".

5. Consideremos la solución numérica mediante métodos de Runge-Kutta explícitos. Escriba dos métodos RK de segundo orden y un método de cuarto orden. Determine sus polinomios de estabilidad $p(\lambda h, r)$. Considere λh como número complejo y escriba una función de Matlab que calcule el máximo (`max`) en valor absoluto (`abs`) de las raíces (`roots`) en función de las partes real e imaginaria del número complejo λh. Dibuje el diagrama de estabilidad de los tres métodos, es decir, el contorno

$$C = \{\lambda h : \max |\text{roots}\,(p(\lambda h, r))| = 1\}.$$

   Note que sólo tiene que dibujar la parte superior del plano complejo, ya que para coeficientes reales, las raíces complejas de un polinomio se dan a pares conjugados.

   Ayuda: Utilice la función `contour` y algo parecido a

```
reLambdah=-5:.1:5; imLambdah=0:.1:5;
[ReLambdah,ImLambdah]=meshgrid(reLambdah,imLambdah);
AbsRoots = funcionMaxAbsRootsPol(ReLambdah,ImLambdah);
contour(ReLambdah,ImLambdah,AbsRoots,[1]);
```

   ¿Cuándo los tres métodos son estables para el problema de van der Pol? Su respuesta será función de μ.

6. Desarrolle sendos códigos Matlab que apliquen los métodos de Runge-Kutta que ha desarrollado en el apartado anterior al problema de van der Pol con $\mu = 1$, 10 y 100. ¿Cómo determina cuál es el error de la solución? ¿Qué método es el más preciso? Si quiere conseguir un error absoluto menor de 10^{-3}, ¿cómo ha de ser el paso de tiempo? Justifique todas sus respuestas. El problema es "stiff", ¿en qué influye en su solución?

7. Consideremos la solución numérica mediante métodos de Adams (Bashforth) explícitos. Escriba los tres primeros métodos y determine sus polinomios de estabilidad $p_n(\lambda h, r)$. Dibuje el diagrama de estabilidad de los tres métodos. ¿Cuándo los métodos son estables para el problema de van der Pol? Su respuesta será función de μ.

8. Desarrolle sendos códigos Matlab que apliquen los métodos de Adams explícitos que ha desarrollado en el apartado anterior al problema de van der Pol con $\mu = 1$, 10 y 100. ¿Cómo determina cuál es el error de la solución? ¿Qué método es el más preciso? Si quiere conseguir un error absoluto menor de 10^{-3}, ¿cómo ha de ser el paso de tiempo? Justifique todas sus respuestas. El problema es "stiff", ¿en qué influye en su solución?

9. Consideremos la solución numérica mediante métodos de Adams (Moulton) implícitos. Escriba los tres primeros métodos y determine sus polinomios de estabilidad $p_n(\lambda h, r)$. Dibuje el diagrama de estabilidad de los tres métodos. ¿Cuándo los métodos son estables para el problema de van der Pol? Su respuesta será función de μ.

10. Desarrolle sendos códigos Matlab que apliquen los métodos de Adams implícitos que ha desarrollado en el apartado anterior al problema de van der Pol con $\mu = 1$, 10 y 100. ¿Cómo determina cuál es el error de la solución? ¿Qué método es el más preciso? Si quiere conseguir un error absoluto menor de 10^{-3}, ¿cómo ha de ser el paso de tiempo? Justifique todas sus respuestas. El problema es "stiff", ¿en qué influye en su solución?

11. Compare entre sí todos los métodos que ha desarrollado. Para conseguir un error absoluto menor de 10^{-3}, ¿cuál es el método más eficiente (menor cómputo)? ¿Cuál es el mejor método para este problema? Justifique su respuesta. ¿Tienen alguna ventaja los métodos de Adams implícitos sobre el resto de los métodos? Justifique su respuesta.

12. Aplique todos los métodos que provee Matlab para la solución de ecuaciones diferenciales (`ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`) a la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$, 10 y 100. Compare los resultados con los suyos. ¿Cuál es el más exacto? ¿y el más rápido o eficiente? Justifique los resultados obtenidos (utilice la ayuda de Matlab para saber cómo operan dichos métodos).

13. Utilizando el mejor algoritmo numérico que haya obtenido, estudie las oscilaciones de relajación del oscilador de van der Pol y determine, el periodo y la amplitud y velocidad máximas del oscilador en función del parámetro μ. ¿Confirma su resultado numérico el siguiente obtenido asintóticamente?

$$T \approx \mu\,(3 - 2\ln 2) + 7.02\,\mu^{-1/3}, \qquad \mu \to \infty,$$

$$\max|t| \approx 2 + 0.78\,\mu^{-4/3}, \qquad \mu \to \infty,$$

$$\max\left|\frac{dx}{dt}\right| \approx \frac{4}{3}\mu + 2.34\,\mu^{-1/3}, \qquad \mu \to \infty.$$

(Hinch, Perturbation Methods, Cambridge University Press, 1991).