

ENUNCIADO DE LA OCTAVA PRÁCTICA (PUNTUACIÓN: 0.25)

Problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Considere el problema de Prothero-Robinson

$$y'' = f(y, y', x) + g'' - f(g, g', x), \quad x \in [0, 10],$$
$$y(0) - y'(0) = g(0) - g'(0), \quad y(10) + y'(10) = g(10) + g'(10),$$

donde

$$g(t) = 1 + \exp(-t) + \exp(t/10) + \tanh(10(7 - t)) - \tanh(10(5 - t)),$$

$$f(y, z, t) = (1 - \sin(y)) \cos(z) + \sin(x) \sin(y).$$

1. ¿Existe la solución del problema de Prothero-Robinson (PR)? ¿Es única? ¿Cuál es dicha solución? Justifique su respuesta e indique los teoremas en los que se haya apoyado y el cumplimiento de sus hipótesis.
2. Implemente el algoritmo del disparo con iteración basada en el método de Newton (recuerde que tiene que acoplar dos ecuaciones diferenciales). Utilice dicho método para obtener la solución del problema de PR usando los métodos que provee Matlab para ecuaciones diferenciales (`ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`). ¿Cuál es el más exacto? ¿y el más rápido? ¿y el más eficiente? Justifique los resultados obtenidos.
3. Desarrolle un método en diferencias finitas de segundo orden para la ecuación PR. Utilice el método de Newton para la ecuación en diferencias resultante. ¿Bajo qué condiciones es diagonalmente dominante la matriz tridiagonal resultante? Utilice dicho método para obtener la solución del problema de PR. ¿Cómo elige el paso de la malla espacial? ¿Cuál es su estimación inicial para el método de Newton? ¿Cuánto itera el método de Newton? ¿Converge el método de Newton? Determine el error de la solución de la ecuación diferencial para varias mallas. ¿Qué norma ha utilizado y el porqué? ¿Cómo determina una solución numérica "exacta"? Dibuje una gráfica del error en función del paso de la malla.
4. ¿Cómo se aplica un método de elementos finitos a una ecuación diferencial no lineal? Escriba la formulación débil, tanto continua como discreta, de dicho problema. Desarrolle un método de elementos lineales a trozos continuos para la ecuación de Prothero-Robinson. ¿Bajo qué condiciones es diagonalmente dominante la matriz de coeficientes que obtiene? Repita el ejercicio anterior pero con este método.
5. Compare entre sí los tres métodos numéricos que ha desarrollado y estudiado en los apartados anteriores. ¿Cuáles son sus conclusiones?