Segunda práctica voluntaria | Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García | 19 de Octubre de 2001

ENUNCIADO DE LA SEGUNDA PRACTICA (PUNTUACIÓN: 0.2)

El objetivo de esta práctica es estudiar algunos algoritmos directos de resolución numérica de sistemas lineales utilizando Matlab.

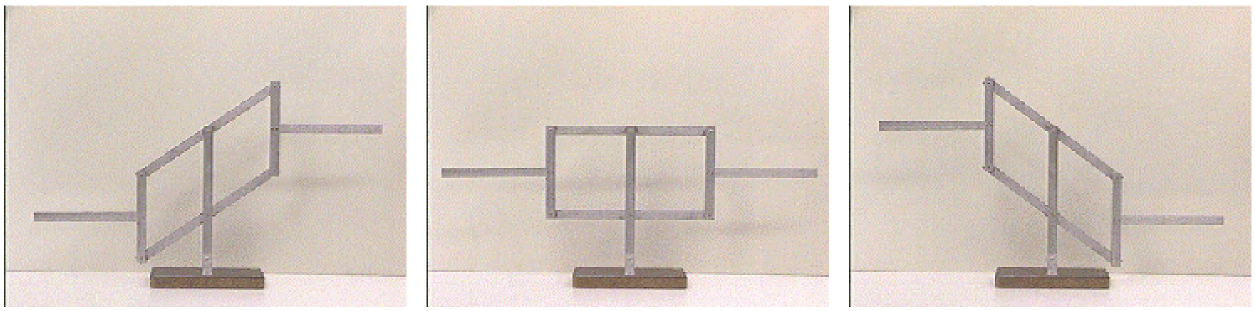

Figure 1. Tres posiciones de una estructura estable que muestra su comportamiento. © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Una estructura articulada móvil como la de la figura 1 se dice estable si mantiene su posición estáticamente tras un cambio en sus enlaces móviles. El la figura 1 presentamos una estructura estable que ha sido colocada en tres configuraciones. Como se ve en dicha figura la estructura se mantiene en cada posición sin moverse.

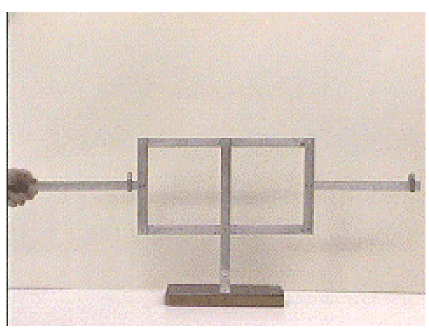

Figure 2. Estructura sujeta tras colocarle asimétricamente dos masas de 200 gramos. ¿Qué pasará si se suelta? © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Ahora bien, podemos añadir pesos a dicha estructura y cambiar las características del equilibrio, volverlo inestable por ejemplo. En la estructura anterior se han añadido dos masas de 200 gramos colocadas asimétricamente, como se muestra en la figura 2, donde la mano de un físico del Departamento de Física de la Universidad de Maryland está sujetando la estructura para que no se mueva. ¿Qué pasará cuando deje de sujetar la estructura?

(a) El lado izquierdo caerá hacia abajo.

(b) El lado derecho caerá hacia abajo.

(c) No pasará nada y la estructura se mantendrá horizontal.

Conteste a la pregunta anterior de manera intuitiva. ¿Está seguro de su respuesta? Piense durante un rato, y luego a trabajar…

1. Desarrolle un modelo matemático de estática para la estructura que aparece en la figura 1 suponiendo que las uniones son pernos sin fricción. Demuestre analíticamente que la estructura de la figura 1 es estable, como se ha indicado más arriba. Si no sabe, no se preocupe.

2. Añada al modelo matemático que ha desarrollado en el apartado anterior las dos masas de 200 gramos colocadas más o menos como en la figura 2. ¿Es estable la nueva estructura? Responda a la pregunta 1 utilizando dicho modelo matemático. ¿Su respuesta es la que esperaba intuitivamente? Si no sabe no haga nada.

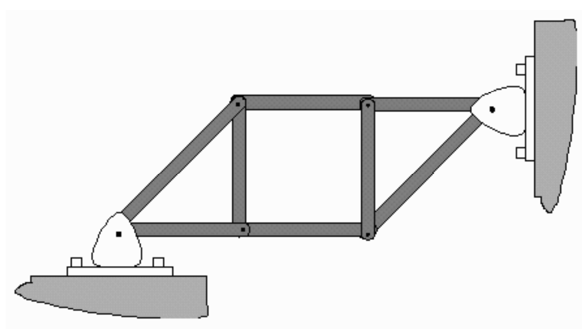

Figura 3. Estructura de 8 enlaces a estudiar numéricamente.

3. Considere la estructura de 8 enlaces que se presenta en la figura 3, donde todos los enlaces son del mismo material, los enlaces están unidos en las uniones por pernos sin fricción y los ángulos son los dados en dicha figura. Escriba las ecuaciones lineales que cumplen las tensiones de los enlaces de la estructura en equilibrio. Ayuda: estas ecuaciones se obtendrán aplicando la condición de equilibrio entre las fuerzas aplicadas y las tensiones de los enlaces para cada uno de los nodos de la estructura. Nota: Hay 6 nodos y 8 enlaces cuyas tensiones son las incógnitas a determinar, pero como las fuerzas se han de descomponer en horizontal y vertical, se obtienen dos ecuaciones para cada uno de los nodos. Es decir, tenemos 12 ecuaciones y 12 incógnitas.

4. Una vez planteadas las ecuaciones introduzca la matriz de coeficientes en un programa de Matlab y determine la solución de dicho sistema utilizando la operación de resolución de sistemas lineales estándar de Matlab ($A\,x = b$, `x = A\b`).

5. Calcule la norma uno, dos e infinito de la matriz y del vector no homogéneo (utilice los comandos `norm, normest`). Haga lo mismo con las de la matriz inversa (`inv(A)`)

6. Calcule el número de condicionamiento $\kappa(A)$ del sistema (utilice los resultados del apartado anterior). Compare estos resultados con los que le dan los comandos de Matlab (`cond`, `condest`. ¿Está bien condicionada la matriz del sistema?

7. Realice una factorización LU de la matriz (comando `lu`) y resuelva el sistema utilizando dichas matrices. ¿Obtiene el mismo resultado que en el apartado (b). ¿Por qué?

8. Puede realizar una factorización de Cholesky de dicha matriz. Si puede, utilice el comando `chol` para obtenerla y resuelva el sistema utilizando esa descomposición. ¿Obtiene el mismo resultado que en el apartado (b). ¿Por qué?

9. Determine los autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes (utilize `eig`).

10. Determine la descomposición en valores singulares de la matriz de coeficientes (utilize `svd`). ¿Cómo son los valores singulares? ¿Cuáles son las matrices unitarias que realizan dicha descomposición? Realice la descomposición en valores singulares de la matriz ampliada del sistema ($[A; b]$). ¿Cómo son los valores singulares? ¿Cuáles son las matrices unitarias que realizan dicha descomposición?

11. Determine la descomposición de Schur de la matriz de coeficientes (utilize `schur`). ¿Cuál es la matriz unitaria que realiza dicha descomposición?

12. Ahora a programar un poco. Implemente el algoritmo de factorización LU con pivotaje parcial (o por filas). Guarde una matriz de permutación (de filas) con los cambios de pivote que haya tenido que realizar. La función que obtenga tendrá como cabecera

```
function [L, U, P] = miLUpiv (A);
% function [L, U, P] = miLUpiv (A);
%   devuelve la factorización LU con pivotaje parcial de A
%   es decir, PA = LU
```

13. Compare el resultado de su función `miLUpiv` con el resultado del comando `lu` de Matlab (`[L,U,P] = lu(A)`). ¿Cuáles son las diferencias cuando se aplican a la matriz de la estructura de la figura 3? Puede justificar dichas diferencias en función de su conocimiento de la asignatura.