Segunda práctica voluntaria | Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García | 20 de Noviembre de 2001

ENUNCIADO DE LA TERCERA PRACTICA (PUNTUACIÓN: 0.2)

El objetivo de esta práctica es estudiar algunos algoritmos iterativos de resolución numérica de sistemas lineales utilizando Matlab.

Atención pregunta: ¿Os gusta el café con leche? ¿Y la termodinámica? ¿Que no tienen nada que ver? Bueno, quien sabe. ¿Cuando ponéis leche fría en el café, qué causa un mayor incremento de la entropía en el sistema café con leche: la mezcla de la leche con el agua del café o el intercambio de calor entre la leche y el agua? Os recomiendo pensar la respuesta tomando un café, obviamente.

Figure 1. Masa suspendida por dos muelles idénticos en serie (izquierda) y detalle de las cuerdas paralelas a los muelles, que están flojas (derecha). © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Una masa está suspendida verticalmente por dos muelles idénticos, que están conectados en serie como muestra la fotografía de la parte izquierda de la figura 1. Cada muelle tiene una cuerda en paralelo que está conectada desde los extremos superior e inferior de cada muelle, respectivamente, con la parte central del otro muelle, como muestra la parte derecha de la figura 1. Observe el clip que conecta los dos muelles directamente, y que permite que las cuerdas estén flojas.

Si eliminamos el clip que conecta los dos muelles, la masa pasará a estar suspendida por dos sistemas paralelos muelle-cuerda, uno formado por el muelle de la parte superior y la cuerda inferior, y el otro formado por la cuerda de la parte superior y el muelle de la inferior.

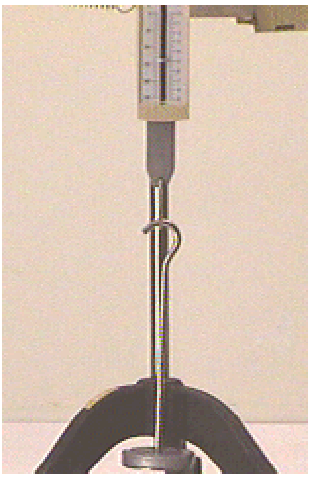
La pregunta que quiero que pienses es la siguiente. Cuando eliminamos el clip, de forma que la masa está suspendida por los dos sistemas paralelos muelle-cuerda, la masa alcanzará una nueva posición de equilibrio que estará

(a) por encima de la mostrada en la figura 1,

(b) por debajo,

(c) no sufrirá ningún cambio (ya que la pregunta tiene truco).

¿Cuál es la respuesta correcta? Ayuda: también lo puedes pensar mientras tomas un café.



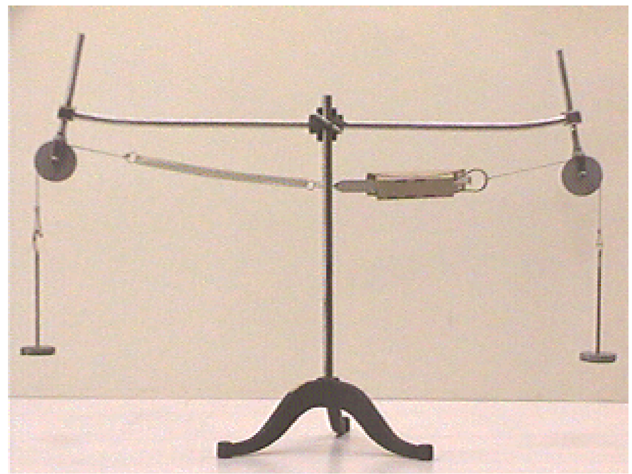


Figure 2. Masa de 150 gramos suspendida por un dinamómetro (izquierda) y un sistema de poleas y muelles que sujeta dos masas de 150 gramos (derecha), que incluye un dinamómetro, que está visto por detrás para ocultar su escala (para no desvelar la pregunta). © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Todos sabéis lo que es un dinamómetro de muelle, básicamente un muelle que tiene acoplada una escala adecuadamente graduada. Supongamos que suspendemos verticalmente una masa de 150 gramos en un dinamómetro de muelle, éste marcará el peso como 150 gramos, como muestra la parte izquierda de la figura 2. Aunque en la foto las unidades exactas de la escala no se ven bien, eso no nos importa.

Supongamos que ahora colocamos dos masas de 150 gramos simétricamente sujetas por un muelle y el dinamómetro anterior mediante dos poleas, como muestra la parte derecha de la figura 2. Note que la cara del dinamómetro que muestra la escala no se ve para no desvelar la pregunta. ¿Qué se leerá en dicha escala? Puede ser cero, ya que los muelles pueden absorber toda la fuerza cuando están estirados. También podría ser 300 gramos ya que cada masa tira con una fuerza de 150 gramos en ambos extremos del dinamómetro en direcciones opuestas. O incluso, podría ser 150 gramos, ya que cada masa tira con 150 gramos, dando un total de 300 gramos, sólo 150 gramos de éstos son absorbidos por el muelle.

En resumen la pregunta es, ¿cuál es la lectura del dinamómetro?

(a) 0 gramos,

(b) 150 gramos,

(c) o 300 gramos.

Conteste a la pregunta anterior de manera intuitiva. ¿Está seguro de su respuesta? Piense durante un rato, y luego a trabajar. . .

Bueno, vayamos al grano. Estudiaremos en esta práctica el sistema de ecuaciones lineales que modela el estado estacionario de un sistema de masas y muelles acoplado.

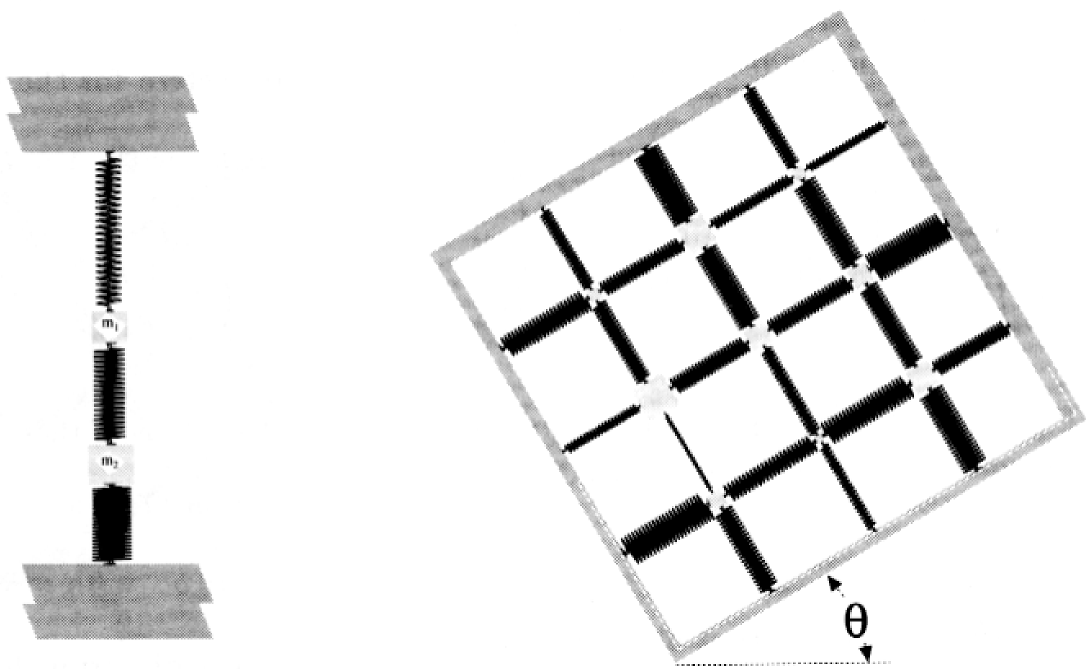


Figure 3. Sistema con 3 muelles acoplados por dos masas en estado estacionario (izquierda) y sistema con 24 muelles acoplados por 9 masas y rotado un ángulo (derecha). © Eriksson, Estep, Hansbo, Johnson, “Computational Differential Equations”, Cambridge Univ. Press, 1996.

Considere el sistema de tres muelles acoplados por dos masas que aparece en la parte izquierda de la figura 3. Denominaremos x_1 y x_2 a los desplazamientos de las masas respecto a su posición en estado estacionario (cuando los muelles ejercen fuerzas nulas sobre ellas y la velocidad de éstas es nula). En equilibrio, la energía cinética del sistema es nula, por lo que la energía total se puede escribir como una parte debida a la energía elástica de los muelles y otra debido al potencial (gravitatorio) externo, es decir,

$$E_T = \frac{k_1}{2}\, x_1^2 + \frac{k_2}{2}\, (x_2 - x_1)^2 + \frac{k_3}{2}\, x_2^2 - m_1\, x_1 - m_2\, x_2.$$

Definiendo vectores $x=(x_1,x_2)^\top$, $m=(m_1,m_2)^\top$, y matrices

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K=\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

podemos escribir la energía total como

$$E_T=\frac{1}{2}\langle K\,B\,x, B\,x\rangle-\langle m,x\rangle,$$

donde $\langle x,y\rangle=x^\top\,y$, es el producto escalar euclídeo.

El estado de equilibrio del sistema es el que minimiza la energía. El estado mínimo es el que hace la derivada respecto de ϵ igual a cero en $E_T(x+\epsilon\,y)$ (a esta derivada se le suele llamar variacional). Derivando obtenemos

$$\langle K\,B\,x, B\,x\rangle=\langle m,x\rangle, \qquad \langle B^\top\,K\,B\,x, x\rangle=\langle m,x\rangle,$$

con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones $A\,x=m$ con $A=B^\top\,K\,B$. ¿Cuál es la matriz A?

1. Considere la estructura con 9 masas y 24 muelles que se considera en la parte derecha de la figura 3. Numere las 9 masas, determine la función de energía de dicho sistema en equilibrio, minimice dicha función de energía y determine el sistema de ecuaciones que modela el estado de equilibrio de la misma. ¿Cuál es la matriz de coeficientes A en $A\,x=m$?

2. Escribe una función que aplique de forma matricial el método iterativo de Gauss-Jacobi para resolver un sistema lineal. ¿Se puede aplicar dicho método a la matriz del sistema lineal del ejercicio anterior? ¿Por qué? Si el método converge, aplica dicho método al problema del apartado 1. ¿Qué condiciones utilizas para chequear la convergencia del método de Gauss-Jacobi? ¿Por qué? Justifica tus respuestas.

3. Repite el apartado anterior con el método de Gauss-Seidel.

4. Repite el apartado anterior con el método de sobrerrelajación sucesiva (SOR) basado en el método de Gauss-Seidel. Además, dibuja el radio espectral de la matriz de convergencia del método en función de w. ¿Cuándo converge?. Determine el w óptimo a partir de dicho dibujo. ¿Cómo determinas numéricamente la tasa de convergencia del método (utiliza sólo los vectores iterados)? ¿Cómo determinas numéricamente el w óptimo utilizando sólo la tasa de convergencia numérica?

5. ¿Es aplicable el método del gradiente conjugado a la matriz de nuestro problema? En su caso aplícalo utilizando la función de Matlab `cgs`. De los algoritmos generalizados del gradiente conjugado que incluye Matlab `bicg`, `bicgstab`, `gmres`, `pcg` y `qmr`, ¿cuáles convergen para la matriz de nuestro problema? ¿Cuál es el más rápido? Ayuda: Estudia con `help` cómo funcionan estas operaciones.

Bueno para los que no seáis cafeteros o aficionados a la termodinámica, me veo obligado a daros respuesta a la primera pregunta.

Sea M la masa del café, y m y c_V la masa y la capacidad calórica de la leche. Supondré que el café está a 330ºK (unos 57ºC) y que la leche tiene una temperatura inicial de 290ºK (unos 17ºC). A primer orden en m/M, el incremento de entropía resultante por el intercambio de calor es (¿por qué?)

$$\Delta S_q = m\, c_V\, (330 - 290) \left(\frac{1}{310} - \frac{1}{330} \right) = 0.008\, m\, c_V, \qquad \frac{330 + 290}{2} = 310,$$

Para calcular el incremento de la entropía en la mezcla, ΔS_m, deberemos despreciar el contenido de agua en la leche. Sea f la fracción de leche que no es agua, que será algún tipo de grasa láctea, y cuyo peso molecular sea M_l. Estas moléculas, cuya fracción molar es $f\, m/M_l$, se distribuirán por un volumen M/m veces mayor del original, con lo que el cambio de entropía debido a la mezcla es (¿por qué?)

$$\Delta S_m = \frac{f\, m}{M_l}\, R\, \ln \frac{M}{m}.$$

Podemos tomar $R = 2\,\mathrm{cal\,mol^{-1}\,K^{-1}}$ y $c_V = 1\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,K^{-1}}$. Podemos asumir, como valores razonables, $f = 1/3$ y $M/m = 10$. Con estos valores

$$\frac{\Delta S_m}{\Delta S_q} \approx \frac{200}{M_l}.$$

El peso molecular de las moléculas de leche (el peso molecular promedio de la parte que no es agua) es con toda seguridad mayor de 200, y probablemente 800 sea un valor bastante razonable.

Por tanto, parece que el intercambio de calor causa un incremento mayor en entropía, aunque no exageradamente más grande.

Problema y solución extraídos de la columna titulada "The Back of the Envelope," editada por Edward M. Purcell, y publicada en la revista internacional *American Journal of Physics* de la American Association of Physics Teachers.