Francisco R. Villatoro y Carmen M. García
9 de Enero de 2002

ENUNCIADO DE LA CUARTA PRÁCTICA (PUNTUACIÓN: 0.3)

Técnicas de aproximación de funciones utilizando Matlab: interpolación mediante polinomios (algebraicos).

Cuestión 1. Considere el intervalo $[-1,1]$ y una malla del mismo con $(N+1)$ puntos, sean

$$1 \geq x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{N-1} > x_N \geq -1,$$

que hemos ordenado en el orden inverso al habitual. Para interpolar por polinomios (de Lagrange o Newton) Matlab provee la función `polyfit` que ajusta mínimo-cuadráticamente un polinomio a una nube de puntos. Cuando el grado de dicho polinomio es igual (o superior) a N, el polinomio de ajuste coincide exactamente con el interpolador. Comente el siguiente código línea a línea.

```
xd=1:10; yd=[1 5 3 3 2 3 6 11 17 34];
N=length(xd)-1;
pol1=polyfit(xd,yd,N);
pol4=polyfit(xd,yd,4);
polNp1=polyfit(xd,yd,N+1);
x=linspace(1,10);
plot(xd,yd,'*',x,polyval(pol1,x),'b',...
     x,polyval(pol4,x),'r',x,polyval(polNp1,x),':')
legend('Datos','Interp.','Ajuste','Mas alla',2)
```

El polinomio interpolador, aunque es único si se fijan los nodos de interpolación, depende fuertemente de la elección de estos nodos. Considere las siguientes posibilidades:

- Puntos equiespaciados (malla uniforme): $x_j = 1 - 2\,j/N$, $(0 \leq j \leq N)$;
- Ceros de los polinomios de Legendre (nodos de Gauss-Legendre): x_j = j-ésimo cero de $P_N(x)$, polinomio de Legendre de grado N $(1 \leq j \leq N)$;
- Extremos de los polinomios de Legendre (nodos de Gauss-Lobatto-Legendre): x_j = j-ésimo extremo de $P_N(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ $(0 \leq j \leq N)$, donde $P_N(x)$ es el polinomio de Legendre de grado N;
- Ceros de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Chebyshev): que se demuestra que son $x_j = \cos((j-1/2)\,\pi/N)$, $(1 \leq j \leq N)$;
- Extremos de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Lobatto-Chebyshev): $x_j = \cos(j\,\pi/N)$, $(0 \leq j \leq N)$; $(0 \leq j \leq N)$.

Escriba 5 funciones que permitan calcular todas y cada una de estas series de nodos. Recuerde que $x_1 > x_N$. Ayuda: para calcular los ceros de polinomios de Legendre, utilice la función `legendre` de Matlab (lea la ayuda con `help`) que devuelve una matriz cuya primera fila son los valores del polinomio, interpole dicho polinomio (`polyfit`) y luego calcule sus raíces (`roots`). Para calcular los extremos, recuerde que son los ceros de la derivada (`polyder`).

Presenta una figura que muestre de forma clara los cinco conjuntos de nodos para $N = 8$. ¿Se parecen entre sí? Comenta las diferencias más significativas.

Presenta una figura comparando los nodos basados en ceros de los polinomios de Legendre y de Chebyshev para $N = 5$ y para $N = 25$. ¿Se parecen entre sí? Comenta las diferencias más significativas.

Cuestión 2. La interpolación polinómica mediante nodos equiespaciados sufre el llamado fenómeno de Runge, es decir, el error de interpolación es $\|f - p_N\| = O\left(2^N\right)$. Sin embargo, utilizando nodos de Chebyshev (o de Legendre) dicho fenómeno no aparece. De hecho, si f es analítica, entonces $\|f - p_N\| = O\left(\text{constante}^{-N}\right)$. Incluso si $f \in \mathrm{C}^0$ no es diferenciable, pero sí Lipschitz continua, el error de interpolación tiende a cero conforme N crece.

Utilizando una función analítica, otra continua pero no diferenciable y otra discontinua, ilustra el fenómeno de Runge para nodos equiespaciados y su ausencia para nodos de Chebyshev y de Legendre (sean ceros o extremos). Ayuda: ilustra algunas gráficas con el fenómeno, muestra como se comporta el error (por ejemplo en norma infinito) en función de N, etc.

Cuestión 3. Considera la función $f(x) = \cos(\alpha N x)$ conforme $N \to \infty$. El valor de α determina el número de nodos (puntos de la malla) por longitud de onda y es fijo independientemente de N. ¿Qué significa número de nodos por longitud de onda?

Presenta una gráfica del error $\|f_N - p_N\|$ como función de N para α fijo (sean 2, π, 6 y 10) para nodos equiespaciados y para nodos de Chebyshev. ¿Qué puedes comentar de los resultados que has obtenido?

Un teorema nos dice que la convergencia de p_N está garantizada si $\alpha >= 6$ para nodos equiespaciados y si $\alpha >= \pi$ para nodos de Chebyshev. ¿Qué significan estos resultados? ¿Cómo se comparan con los resultados numéricos que has obtenido en las gráficas anteriores?

Encuentras alguna relación entre el límite de Nyquist a la hora de muestrear una señal continua y los resultados anteriores. Ayuda: la densidad de nodos de Chebyshev en el centro del intervalo es $\pi/2$ menos densa que para el mismo número de nodos pero equiespaciados.

Cuestión 4. Considera la malla del intervalor $[-1, 1]$ dada por los nodos $\{x_j\}$, $0 \leq j \leq N$, que son los extremos de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Lobatto-Chebyshev). Si interpolamos una función $f(x)$ en dichos nodos (los valores $\{f_j\}$) obtendremos el polinomio $p_N(x)$. Para aproximar la derivada $f'(x)$ en los nodos $\{f_j^{(1)}\}$ podemos derivar directamente el polinomio y evaluarlo en dichos nodos, $f_j^{(1)} = p'_N(x_j)$.

Supongamos que existe una matriz D_N (cuadrada de orden $(N+1)$) que multiplicada por el vector de valores f_j (de $(N + 1)$ componentes) da como resultado el vector de valores de la derivada $f_j^{(1)}$. Dicha matriz se denomina matriz de derivación de Chebyshev, y siempre existe. Calcula dicha matriz para $N = 1$, 2, 3 y 4. ¿Son simétricas estas matrices? ¿Y antisimétricas? Una matriz real A se llama normal si

$A\,A^\top = A^\top\,A$. Se puede demostrar que todas las matrices normales tienen un conjunto de autovectores ortogonal, lo que implica que $\rho(A^n) = \|A^n\| = \|A\|^n$, para todo n. ¿Son normales las matrices D_N?

Cuestión 5. La Symbolic Toolbox de Matlab permite el acceso a un núcleo del paquete de matemáticas simbólicas Maple. En este paquete se puede acceder a funciones que implementan todos los polinomios ortogonales (y otras funciones de la física matemática). Veamos cómo se usa. Todos los polinomios ortogonales, como los de Legendre, se pueden generar mediante un desarrollo de Taylor de una función, llamada generatriz, en la forma

$$g(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Para los polinomios de Legendre ($P_n(x)$) la función generatriz es

$$g(x;t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\,x\,t+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Explica el funcionamiento del siguiente código Matlab:

```
syms x t;
ord = 5;
ft = taylor (1/sqrt(1-2*x*t+t^2),ord+1,t),
for cual=0:ord,
 scual=num2str(cual);
 eval(['p',scual,'=subs(diff(ft,t,',scual,'),t,0)/factorial(',scual,')'])
 eval(['p',scual,'coef=sym2poly(p',scual,')'])
 eval(['p',scual,'root=roots(p',scual,'coef)'])
end
```

Para acceder directamente a los polinomios de Legendre en Maple es necesario cargar el paquete `orthopoly`, por ejemplo, podemos usar el código siguiente

```
maple('with(orthopoly);')
maple('P(5,x)')
p5,
```

Para obtener la ayuda de Maple desde Matlab es necesario usar el comando `mhelp`. Por ejemplo,

```
>> mhelp P
```

```
orthopoly[P] - Legendre and Jacobi polynomials

Calling Sequence:
     P(n, a, b, x)
     P(n, x)
     orthopoly[P](n, a, b, x)
     orthopoly[P](n, x)
```

Dicho paquete permite trabajar con varios polinomios ortogonales. Mirando la ayuda, indica ¿qué son los polinomios ortogonales `G`, `H`, `L`, `T` y `U`? ¿En qué intervalo está definido su producto interior y con función peso?

Compara gráficamente dichos polinomios en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Cuál de esos polinomios (para un grado n fijo) es el que más se parece a cero? ¿Qué norma has utilizado?

COMPLEMENTO A LA CUARTA PRÁCTICA

Todos nos hemos preguntado alguna vez ¿por qué vemos el cielo azul (celeste) aunque para un astronauta en órbita es negro? La razón es ampliamente conocida, la dispersión de Rayleigh, es decir, el choque de las partículas de luz (fotones) con las moléculas del aire (nitrógeno en gran parte), que absorben éstas y las reemiten posteriormente. Como la longitud de onda de la luz es mucho mayor que el diámetro de una "molécula" de aire, la componente más importante de la dispersión (*scattering*) es la componente difusa (omnidireccional e isótropa, llamada difusión de Lambert). La tasa de reemisión (sección eficaz) es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la longitud de onda de la luz. Por ello el azul se difunde "unas cuatro veces" mejor que el rojo, y peor que el ultravioleta. El proceso de difusión lambertiana depende también del ángulo relativo entre la fuente (el sol) y el observador, por lo que el azul del cielo no es igual en todas partes, de hecho en el ocaso (y al alba), cuando la luz recorre una mayor distancia en la atmósfera, las componentes azuladas sufren más procesos de dispersión y se atenúan más rápidamente que las amarillas y rojas. Pero, ¿por qué el cielo es negro? Para un astronauta, o para tí de noche. **Piensa un poco en ello**.

Nuestro ojo es uno de las "aparatos ópticos" más refinados que existen. Nuestros fotorreceptores se denominan conos y bastoncillos. Los conos reciben la información de crominancia (el color) utilizando un modelo triestimular, basado en tres tipos de conos que reciben tres "colores" básicos (rojo, verde y azul). Los bastoncillos reciben la información de luminancia, son más sensibles que los conos y, en visión nocturna, son los únicos que actúan (por eso de noche no distinguimos bien los colores). Un sólo bastón puede detectar unos pocos fotones por segundo (pongamos unos 30). Si la Tierra fuera plana, no existiera la atmósfera (en el vacío) y en una noche completamente oscura, **¿a qué distancia se podría ver una bombilla encendida?** ¿A un kilómetro, a diez, a cien o a mil?

Pero todos sabemos que la Tierra es curva, ¿cómo afecta al resultado anterior? Es decir, ¿cuál es la distancia máxima a la que podemos ver la cima de una colina? ¿Y para las ondas (cortas) de radio, cuya longitud es de varios metros?

Como es obvio, la dispersión de Rayleigh podría limitar la distancia a la que podemos ver en línea recta incluso si la Tierra fuera plana. ¿Cuál es dicho límite? Ayuda:

la sección eficaz por molécula debida a la dispersión de Rayleigh es

$$\sigma = \frac{8\,\pi}{3}\,\frac{a^2}{\lambda^4},$$

donde λ es la longitud de onda de la luz incidente y a es la polarizabilidad molecular del gas, que para un gas rarificado viene dada por

$$a = \frac{3}{4\,\pi\,N}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2},$$

donde N es el número de moléculas por unidad de volumen y ε es la constante dieléctrica del gas. Remito al alumno a algún libro sobre interacción de materia y radiación para una demostración de la misma (por ejemplo, *Electrodinámica de los medios continuos*, Landau y Lifshitz, Reverté).

En resumen, ¿se puede ver la Maroma en la Sierra de Almijara (2065 m de altura) desde Málaga, en concreto, desde el teleférico de Benalmádena situado a unos 800 m de altura, que se encuentra a unos 40 km de distancia de ella? ¿Se puede ver el Mulhacen (3478 m, Sierra Nevada) que se encuentra a unos 140 km desde el mismo sitio? ¿Y el pico más alto del Rif en Marruecos (2458 m.) a unos 200 km?

Ayuda: Considere que la atmósfera está formada fundamentalmente por nitrógeno, cuyo índice de refracción (cuando es líquido) es de 1.2 para la luz visible y cuya densidad es de $0.8\,\mathrm{g/cm^{-3}}$.

COMPLEMENTO A LA CUARTA PRÁCTICA

Hablando de la visión, procede hacernos algunas cuestiones ópticas y geométricas.

En la figura 1 vemos a una muchacha que se mira en un espejo y se pregunta cómo describir exactamente su imagen en él.

Figura 1. Una muchacha se mira en un espejo y se pregunta ¿qué es lo que veo? © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

La imagen en el espejo está

1. ¿invertida de arriba a abajo?
2. ¿invertida de izquierda a derecha?
3. ¿invertida de frente a atrás?
4. o ¿no invertida de ninguna forma?

Recuerda que puede que varias de dichas respuestas sean correctas.

En la figura 2 vemos una transparencia con las letras LIGHT escritas en negro.

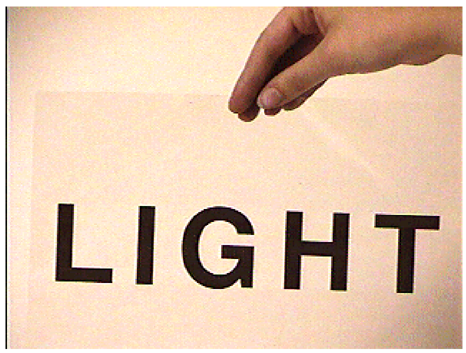

Figura 2. Una transparencia con las letras LIGHT en negro. © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Si situamos la transparencia enfrente de un espejo, ¿cómo será la imagen que aparece reflejada en él?

1. ¿invertida de arriba a abajo?
2. ¿invertida de izquierda a derecha?
3. ¿invertida de frente a atrás?
4. o ¿no invertida de ninguna forma?

Recuerda que puede que varias de dichas respuestas sean correctas. Escribe la palabra LIGHT como aparecería en el espejo.

La visión geométrica tridimensional es muy importante para un ingeniero y se educa en las asignaturas de dibujo técnico. Veamos un par de cuestiones curiosas al respecto. En la figura 3 vemos las proyecciones diédricas frontal y lateral de un objeto (sólido) tridimensional.

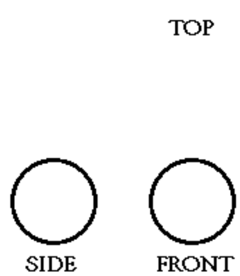

Figura 3. Proyecciones frontal y lateral de un sólido tridimensional. © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

Estos dibujos permiten construir mecánicamente dicho objeto sólido tridimensional, que no es una esfera y tampoco una superficie delgada.

La pregunta es, ¿cuál es la tercera (vista superior) de dicho objeto? Para facilitar la respuesta, daremos algunas pistas

1. Puede ser un círculo.
2. Puede ser un cuadrado.
3. Puede ser un cuadrado con varias líneas adicionales.
4. Puede ser un triángulo.
5. Puede ser un triángulo con varias líneas adicionales.

En la figura 4 vemos las proyecciones diédricas frontal y lateral de otro objeto (sólido) tridimensional (mucho más simple que el anterior).

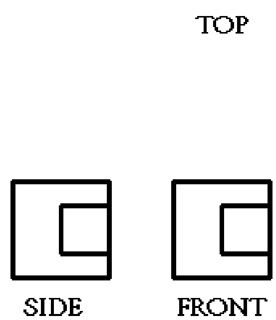

Figura 4. Proyecciones frontal y lateral de un sólido tridimensional. © "The Physics Question of the Week," of the University of Maryland Department of Physics.

La pregunta es, ¿cuál es la tercera (vista superior) de dicho objeto? Para facilitar la respuesta, daremos algunas pistas

1. Puede ser un círculo.
2. Puede ser dos cuadrados.
3. Puede ser dos cuadrados con varias líneas adicionales.
4. Puede ser dos triángulos.
5. Puede ser dos triángulos con varias líneas adicionales.

¿Por qué el cielo es negro? ¿Acaso no debería serlo? Olbers en el siglo XIX descubrió, que dado que hay billones de billones de fuentes luminosas en nuestra región local del Universo, su contribución, aunque pequeña individualmente, eclipsaría al mismo Sol (la noche debería ser más luminosa que el día). A este fenómeno se le denomina paradoja de Olbers. Él propuso una explicación, el polvo interestelar. Obviamente es falsa.

La respuesta asumida por el modelo cosmológico estándar está en el corrimiento hacia el rojo (*red shift*), es decir, el efecto Doppler cósmico debido a la expansión de Hubble, cuya causa última es la gran explosión inicial (*big bang*) que creó el Universo. La luz blanca que llenaría todo la noche está corrida en gran parte al infrarrojo y, por tanto, es invisible para nosotros.

¿A qué distancia se puede ver una bombilla encendida? ¿A un kilómetro, a diez, a cien o a mil? Teniendo en cuenta que la energía de un fotón es $h\,f$, donde h es la constante de Planck, unos 7×10^{-27} ergios por segundo, y f es la frecuencia de la luz, para el color amarillo unos 5×10^{14} hercios. Considerando unos 30 fotones, el ojo es sensible a una energía de unos 10^{-10} ergios. Una bombilla típica, sea de 50 watios, con una eficacia del 20%, emite en un segundo una energía equivalente a 10 julios, unos 10^8 ergios. Esta energía se distribuye en un frente de onda esférico (o casi), de forma que el ojo capta sólo la porción correspondiente al área de la pupila. Asignando a la pupila un área de $0.1\,\mathrm{cm}^2$, obtenemos que la superficie esférica de la onda toma el valor de $0.1 \times 10^8/10^{-10}\,\mathrm{cm}^2$, unos $10^7\,\mathrm{km}^2$, que corresponden a una distancia máxima (radio de la onda) de casi mil kilómetros (892 km). ¿Poco creíble no? Bueno, es que estamos acostumbrados a ver las cosas con la atmósfera por medio, y con la curvatura de la Tierra.

Teniendo en cuenta la curvatura de la Tierra y suponiendo que no hay obstáculos, ¿cuál es la distancia máxima a la que podemos ver la cima de una colina? Tomando nuestra línea de visión como tangente a la esfera definida por la Tierra una montaña de altura h se verá a una distancia d dada por $d^2 = 2\,h\,R + h^2$, donde R es el radio de la Tierra. Tomando 6367.5 km como radio en nuestras latitudes, la cima de una montaña de 1, 2, 3 y 4 km se observará como mucho a 113, 160, 195 y 226 km, respectivamente. Dado que el ángulo subtendido es tan pequeño, dicha distancia puede considerarse a lo largo de la superficie de la Tierra con un error despreciable.

¿Y para las onda de radio? Para ondas electromagnéticas cuya longitud de onda son varios metros, que pueden rodear obstáculos que a nosotros nos parecen enormes, como una colina o la curvatura terrestre, Poincaré estimó en 1901 que la distancia máxima en la que se podían comunicar dos estaciones era de unos 300 km. Sin embargo, ese mismo año, Marconi, desoyéndolo, desde Terranova (Canadá) oyó en sus auriculares la señal Morse de la letra S, tres puntos, enviada desde Inglaterra. Por ello, Marconi recibió el premio Nobel. ¿En qué se equivocó Poincaré? La existencia de la ionosfera no era conocida en aquel entonces. Quizás fue gracias a ella por lo que Marconi recibió el Nobel. Poincaré, sin embargo, nunca lo recibió, por ser considerado matemático, aunque es el científico más nominado que no lo haya recibido.

¿Cuál es la distancia horizontal en una Tierra plana a la que se puede ver teniendo en cuenta la dispersión de Rayleigh? Utilizaremos las fórmulas y los datos dados previamente. El número de moléculas por unidad de volumen en el Nitrógeno líquido es $(0.8/28) \times 6 \times 10^{23} = 1.7 \times 10^{22}$. La constante dieléctrica es $\varepsilon = (1.2)^2 = 1.44$, nos permite calcular la polarizabilidad molecular, $a = 1.8 \times 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3$. Para una longitud de onda en el visible de $\lambda = 10^{-5}\,\mathrm{cm}$, la sección eficaz por molécula para la dispersión de Rayleigh es $\sigma = 2.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2$. Asumamos que es la misma para las moléculas de oxígeno y depreciemos las trazas de otros gases en el aire. Hay 2.5×10^{19} moléculas por cm^3 en el aire al nivel del mar. Por tanto la distancia de extinción hasta $1/e$ debida a la dispersión de Rayleigh es de 150 km. Bajo luz diurna, la distancia es menor debido a la pérdida de contraste que sufrimos por la luz solar que recibe el ojo directamente.

Dejamos al alumno responder a las restantes (y simples) preguntas.