Cuarta práctica voluntaria — Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 17 de Enero de 2003

FECHA LÍMITE DE ENTREGA: Miércoles 5 de marzo de 2003

ENUNCIADO DE LA CUARTA PRÁCTICA (PUNTUACIÓN: 0.3)

Técnicas de interpolación mediante polinomios (algebraicos).

Cuestión 1. Considere el intervalo $[-1, 1]$ y una malla del mismo con $(N + 1)$ puntos, sean

$$1 \geq x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{N-1} > x_N \geq -1,$$

que hemos ordenado en el orden inverso al habitual. Para interpolar por polinomios (de Lagrange o Newton) Matlab provee la función `polyfit` que ajusta mínimo-cuadráticamente un polinomio a una nube de puntos. Cuando el grado de dicho polinomio es igual (o superior) a N, el polinomio de ajuste coincide exactamente con el interpolador. Comente el siguiente código línea a línea.

```
xd=1:10; yd=[1 5 3 3 2 3 6 11 17 34];
N=length(xd)-1;
pol1=polyfit(xd,yd,N);
pol4=polyfit(xd,yd,4);
polNp1=polyfit(xd,yd,N+1);
x=linspace(1,10);
plot(xd,yd,'*',x,polyval(pol1,x),'b',...
     x,polyval(pol4,x),'r',x,polyval(polNp1,x),':')
legend('Datos','Interp.','Ajuste','Mas alla',2)
```

El polinomio interpolador, aunque es único si se fijan los nodos de interpolación, depende fuertemente de la elección de estos nodos. Considere las siguientes posibilidades:

- Puntos equiespaciados (malla uniforme): $x_j = 1 - 2\,j/N$, $(0 \leq j \leq N)$;
- Ceros de los polinomios de Legendre (nodos de Gauss-Legendre): $x_j = j$-ésimo cero de $P_N(x)$, polinomio de Legendre de grado N $(1 \leq j \leq N)$;
- Extremos (máximos, mínimos o puntos de inflexión) de los polinomios de Legendre (nodos de Gauss-Lobatto-Legendre): $x_j = j$-ésimo extremo de $P_N(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ $(0 \leq j \leq N)$, donde $P_N(x)$ es el polinomio de Legendre de grado N;
- Ceros de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Chebyshev): que se demuestra que son $x_j = \cos((j - 1/2)\,\pi/N)$, $(1 \leq j \leq N)$;
- Extremos de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Lobatto-Chebyshev): $x_j = \cos(j\,\pi/N)$, $(0 \leq j \leq N)$; $(0 \leq j \leq N)$.

Escriba 5 funciones que permitan calcular todas y cada una de estas series de nodos. Recuerde que $x_1 > x_N$. Ayuda: para calcular los ceros de polinomios de Legendre, utilice la función `legendre` de Matlab (lea la ayuda con `help`) que devuelve una matriz cuya primera fila son los valores del polinomio, interpole dicho polinomio (`polyfit`) y luego calcule sus raíces (`roots`). Para calcular los extremos, recuerde que son los ceros de la derivada (`polyder`).

Presenta una figura que muestre de forma clara los cinco conjuntos de nodos para $N = 8$. ¿Se parecen entre sí? Comenta las diferencias más significativas.

Presenta una figura comparando los nodos basados en ceros de los polinomios de Legendre y de Chebyshev para $N = 5$ y para $N = 25$. ¿Se parecen entre sí? Comenta las diferencias más significativas.

Cuestión 2. La interpolación polinómica mediante nodos equiespaciados sufre el llamado fenómeno de Runge, es decir, el error de interpolación es $\|f - p_N\| = O\left(2^N\right)$. Sin embargo, utilizando nodos de Chebyshev (o de Legendre) dicho fenómeno no aparece. De hecho, si f es analítica, entonces $\|f - p_N\| = O\left(\text{constante}^{-N}\right)$. Incluso si $f \in \mathrm{C}^0$ no es diferenciable, pero sí Lipschitz continua, el error de interpolación tiende a cero conforme N crece.

Utilizando una función analítica, otra continua pero no diferenciable y otra discontinua, ilustra el fenómeno de Runge para nodos equiespaciados y su ausencia para nodos de Chebyshev y de Legendre (sean ceros o extremos). Ayuda: ilustra algunas gráficas con el fenómeno, muestra como se comporta el error (por ejemplo en norma infinito) en función de N, etc.

Cuestión 3. Considera la función $f(x) = \cos(\alpha N x)$ conforme $N \to \infty$. El valor de α determina el número de nodos (puntos de la malla) por longitud de onda y es fijo independientemente de N. ¿Qué significa número de nodos por longitud de onda?

Presenta una gráfica del error $\|f_N - p_N\|$ como función de N para α fijo (sean 2, π, 6 y 10) para nodos equiespaciados y para nodos de Chebyshev. ¿Qué puedes comentar de los resultados que has obtenido?

Un teorema nos dice que la convergencia de p_N está garantizada si $\alpha >= 6$ para nodos equiespaciados y si $\alpha >= \pi$ para nodos de Chebyshev. ¿Qué significan estos resultados? ¿Cómo se comparan con los resultados numéricos que has obtenido en las gráficas anteriores?

Encuentras alguna relación entre el límite de Nyquist a la hora de muestrear una señal continua y los resultados anteriores. Ayuda: la densidad de nodos de Chebyshev en el centro del intervalo es $\pi/2$ menos densa que para el mismo número de nodos pero equiespaciados.

Cuestión 4. Considera la malla del intervalor $[-1, 1]$ dada por los nodos $\{x_j\}$, $0 \leq j \leq N$, que son los extremos de los polinomios de Chebyshev (nodos de Gauss-Lobatto-Chebyshev). Si interpolamos una función $f(x)$ en dichos nodos (los valores $\{f_j\}$) obtendremos el polinomio $p_N(x)$. Para aproximar la derivada $f'(x)$ en los nodos $\{f_j^{(1)}\}$ podemos derivar directamente el polinomio y evaluarlo en dichos nodos, $f_j^{(1)} = p'_N(x_j)$.

Supongamos que existe una matriz D_N (cuadrada de orden $(N+1)$) que multiplicada por el vector de valores f_j (de $(N+1)$ componentes) da como resultado el vector de valores de la derivada $f_j^{(1)}$. Dicha matriz se denomina matriz de derivación de Chebyshev, y siempre existe. Calcula dicha matriz para $N = 1$, 2, 3 y 4. ¿Son simétricas estas matrices? ¿Y antisimétricas? Una matriz real A se llama normal si $A\,A^\top = A^\top\,A$. Se puede demostrar que todas las matrices normales tienen un conjunto de autovectores ortogonal, lo que implica que $\rho(A^n) = \|A^n\| = \|A\|^n$, para todo n. ¿Son normales las matrices D_N?

Cuestión 5. La Symbolic Toolbox de Matlab permite el acceso a un núcleo del paquete de matemáticas simbólicas Maple. En este paquete se puede acceder a funciones que implementan todos los polinomios ortogonales (y otras funciones de la física matemática). Veamos cómo se usa. Todos los polinomios ortogonales, como los de Legendre, se pueden generar mediante un desarrollo de Taylor de una función, llamada generatriz, en la forma

$$g(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Para los polinomios de Legendre ($P_n(x)$) la función generatriz es

$$g(x;t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,t + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n.$$

Explica el funcionamiento del siguiente código Matlab:

```
syms x t;
ord = 5;
ft = taylor (1/sqrt(1-2*x*t+t^2),ord+1,t),
for cual=0:ord,
 scual=num2str(cual);
 eval(['p',scual,'=subs(diff(ft,t,',scual,'),t,0)/factorial(',scual,')'])
 eval(['p',scual,'coef=sym2poly(p',scual,')'])
 eval(['p',scual,'root=roots(p',scual,'coef)'])
end
```

Para acceder directamente a los polinomios de Legendre en Maple es necesario cargar el paquete `orthopoly`, por ejemplo, podemos usar el código siguiente

```
maple('with(orthopoly);')
maple('P(5,x)')
p5,
```

Para obtener la ayuda de Maple desde Matlab es necesario usar el comando `mhelp`. Por ejemplo, escriba `mhelp P`. Dicho paquete permite trabajar con varios polinomios ortogonales. Mirando la ayuda, indica ¿qué son los polinomios ortogonales `G`, `H`, `L`, `T` y `U`? ¿En qué intervalo está definido su producto interior y con función peso?

Compara gráficamente dichos polinomios en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Cuál de esos polinomios (para un grado n fijo) es el que más se parece a cero? ¿Qué norma has utilizado?