Sexta práctica voluntaria — Técnicas Numéricas
Francisco R. Villatoro y Carmen M. García — 09 de Abril de 2003
FECHA DE ENTREGA: 30 de Abril de 2003

ENUNCIADO DE LA SEXTA PRACTICA (PUNTUACIÓN: 0.3)

Algoritmos de integración (cuadratura) numérica.

Considere una película líquida fría, inicialmente a temperatura T_0 cayendo hacia abajo (en la dirección del eje z) por una pared sólida (plano xz). La pared sólida se mantiene a una temperatura T_s mayor que la de la película que cae. La ecuación en derivadas parciales que nos permite conocer la temperatura de la película (en función de y y z) es

$$\rho\, C_p\, v_z\, \frac{\partial T}{\partial z} = k\, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

donde ρ es la densidad del líquido, C_p es su capacidad térmica (calórica), v_z es la velocidad de caída del fluido, k es la conductividad térmica, y T es la temperatura del líquido.

El perfil de velocidad de la película de líquido cayendo se puede obtener, si la suponemos suficientemente delgada, mediante la fórmula

$$v_z = \frac{\delta^2\, \rho\, g}{2\, \mu} \left(2\, \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right),$$

donde δ es el grosor de la película, g es la aceleración de la gravedad, y μ es la viscosidad del líquido. Cerca de la pared, donde $y \ll \delta$, la velocidad se puede considerar lineal

$$v_z = \frac{\delta\, \rho\, g}{\mu}\, y,$$

que conduce a la ecuación de equilibrio energético

$$y\, \frac{\partial T}{\partial z} = \beta\, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad \beta = \frac{\mu\, k}{\rho^2\, C_p\, g\, \delta}.$$

Para obtener la solución necesitamos imponer unas condiciones de contorno adecuadas, sean éstas

$$\begin{aligned} T(y,0) &= T_0, \qquad y > 0,\\ T(0,z) &= T_s, \qquad z > 0,\\ \lim_{y\to\infty} T(y,z) &= T_0, \qquad z \text{ finito}. \end{aligned}$$

La solución analítica de este problema (lineal) es fácil de obtener como

$$\Theta(\eta) = \frac{T(\eta) - T_0}{T_s - T_0} = 1 - \frac{1}{\Gamma(4/3)} \int_0^\eta e^{-\eta^3}\, d\eta, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt[3]{9\,\beta\, z}},$$

donde hemos utilizado η como variable adimensional, y la función Gamma se define como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad x > 0.$$

El alumno puede notar que

$$\int_0^\eta e^{-\eta^3}\, d\eta = \frac{1}{3} \left(\Gamma(1/3) - \Gamma(1/3, \eta^3)\right),$$

donde se ha utilizado la función Gamma incompleta

$$\Gamma(n, x) = \int_x^\infty t^{a-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad x > 0.$$

1. Para utilizar las reglas de integración gaussiana basada en polinomios de Legendre (integración de Gauss-Legendre) es necesario calcular los polinomios de Legendre y sus ceros. Utilizando la fórmula

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2\,n - 2\,m)!}{2^n\, m!\, (n-m)!\, (n - 2\,m)!}\, x^{n-2\,m},$$

   donde $\lfloor z \rfloor \in \mathbb{Z}$ es la parte entera de $z \in \mathbb{R}$, tal que $\lfloor z \rfloor \le z < \lfloor z \rfloor + 1$, escriba un código Matlab que le permita calcular los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ y que calcule sus ceros utilizando la función de Matlab `roots`. Represente gráficamente la distribución de ceros para N=2:25 (se ha utilizado la notación de Matlab) y comente las conclusiones que considere oportunas sobre la misma.

2. Escriba un código Matlab que determine los coeficientes de una fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con M nodos.

3. Desarrolle un código Matlab basado en cuadratura numérica de Gauss-Legendre para calcular la función $\Gamma(x)$. Tendrá que cortar el intervalo $[0, \infty)$ a un valor suficientemente grande llamado valor de corte. Su código tendrá como parámetro el número N de nodos de integración (suponga $N \ge 2$). Dibuje la función $\Gamma(x)$ en $[0, 4]$. Comente la figura obtenida.

4. Calcule los valores $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con N=2:25 nodos. ¿Cómo puede verificar la precisión de sus resultados? ¿Qué precisión tienen los resultados que ha obtenido (en función de N)? ¿Cómo depende la precisión de sus resultados, para $N = 20$, por ejemplo, en función del valor de corte? Calcule $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con 10, 12 y 15 dígitos de precisión. ¿Cómo ha comprobado la precisión de sus resultados? ¿Cuántos nodo de integración ha necesitado? ¿Qué valor de corte?

5. Desarrolle un código Matlab basado en una regla gaussiana COMPUESTA de tipo Gauss-Legendre para calcular la función $\Gamma(x)$ que depende del grado M del polinomio usado en cada subintervalo. Calcule los valores $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con N=2:20 subintervalos para polinomios de grado M=3:7. ¿Cómo puede verificar la precisión de sus resultados? ¿Qué precisión tienen los resultados que ha obtenido (en función de N)? ¿Cómo depende la precisión de sus resultados, para $N = 20$, por ejemplo, en función del valor de corte? ¿Y en función del grado del polinomio? Calcule $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con 10, 12 y 15 dígitos de precisión. ¿Cómo ha comprobado la precisión de sus resultados? ¿Cuántos nodo de integración ha necesitado? ¿Qué valor de corte?

6. Determine gráficamente la función $\Theta(\eta)$ para $\eta \in [0, 2]$ mediante los códigos de cuadratura simple y compuesta de Gauss-Legendre que ha desarrollado en los apartados anteriores. ¿Con qué precisión ha calculado la función? Analice la compatibilidad o consistencia de la solución que ha obtenido con las condiciones de contorno de su problema. ¿Es razonable el resultado obtenido?

7. Para utilizar las reglas de integración gaussiana basada en polinomios de Laguerre (integración de Gauss-Laguerre) es necesario calcular los polinomios de Laguerre y sus ceros. Utilizando la fórmula de recurrencia

$$L_{n+1}(x) - (2\,n + 1 - x)\,L_n(x) + n^2\,L_{n-1}(x) = 0,$$

donde $L_0(x) = 1$ y $L_1(x) = 1 - x$, escriba un código Matlab que le permita calcular los coeficientes del polinomio $L_n(x)$ y que calcule sus ceros utilizando la función de Matlab `roots`. Represente gráficamente la distribución de ceros para N=2:25 y comente las conclusiones que considere oportunas sobre la misma.

8. Escriba un código Matlab que determine los coeficientes de una fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre con M nodos.

9. Desarrolle un código Matlab basado en cuadratura numérica de Gauss-Laguerre para calcular la función $\Gamma(x)$. Su código tendrá como parámetro el número N de nodos de integración. Dibuje la función $\Gamma(x)$ en $[0, 4]$. Comente la figura obtenida.

10. Calcule los valores $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con N=2:25 nodos. ¿Cómo puede verificar la precisión de sus resultados? ¿Qué precisión tienen los resultados que ha obtenido (en función de N)? Calcule $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con 10, 12 y 15 dígitos de precisión. ¿Cómo ha comprobado la precisión de sus resultados? ¿Cuántos nodo de integración ha necesitado? ¿Qué valor de corte?

11. Desarrolle un código Matlab basado en una regla gaussiana COMPUESTA de tipo Gauss-Laguerre para calcular la función $\Gamma(x)$ que depende del grado M del polinomio usado en cada subintervalo. Calcule los valores $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con N=2:20 subintervalos para polinomios de grado M=3:7. ¿Cómo puede verificar la precisión de sus resultados? ¿Qué precisión tienen los resultados que ha obtenido (en función de N)? ¿Y en función del grado del polinomio? Calcule $\Gamma(4/3)$ y $\Gamma(1/3)$ con 10, 12 y 15 dígitos de precisión. ¿Cómo ha comprobado la precisión de sus resultados? ¿Cuántos nodo de integración ha necesitado? ¿Qué valor de corte?

12. Determine gráficamente la función $\Theta(\eta)$ para $\eta \in [0, 2]$ mediante los códigos de cuadratura simple y compuesta de Gauss-Laguerre que ha desarrollado en los apartados anteriores. ¿Con qué precisión ha calculado la función? Analice la compatibilidad o consistencia de la solución que ha obtenido con las condiciones de contorno de su problema. ¿Es razonable el resultado obtenido?

13. Compare sus resultados con fórmulas de Gauss-Legendre y Gauss-Laguerre para resolver tanto el cálculo de los valores de la función Γ como del perfil de temperatura Θ. Por ejemplo, su coste, el número de nodos para alcanzar una precisión dada, su facilidad de programación, la influencia del valor de corte, etc.

NOTA: Entre dos alumnos, que uno haga 1-6, y el otro 7-12, y los dos 13.