Séptima práctica voluntaria | Técnicas Numéricas

Francisco R. Villatoro y Carmen M. García | 21 de Mayo de 2003

ENUNCIADO DE LA SÉPTIMA (y ÚLTIMA) PRÁCTICA

NOTA: las notas de las prácticas del segundo cuatrimestre serán (1/3 cada una)

De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, el movimiento de un cuerpo pequeño (de masa m) sometido a la atracción de un cuerpo de mayor masa (M), se rige por las siguientes ecuaciones, escritas en coordenadas polares,

$$m\,(r'' - r\,(\theta')^2) = -\frac{G\,m\,M}{r^2}, \qquad m\,(r\,\theta'' + 2\,\theta'\,r') = 0, \tag{1}$$

donde la prima indica derivada respecto al tiempo, G es la constante de gravitación universal y la trayectoria $(x(t), y(t))$ en coordenadas polares está dada por $x(t) = r(t)\,\cos\theta(t)$ e $y(t) = r(t)\,\sin\theta(t)$.

Cuestión 1. Deduzca las ecuaciones (1) a partir de las leyes de Newton en coordenadas cartesianas. Cuál es el significado físico de cada una de estas ecuaciones. La solución de estas ecuaciones es una elipse. Obtenga dicha solución en coordenadas polares. Observe que la solución es independiente de la masa del cuerpo pequeño y que, adimensionalizando, la única constante libre, $k = G\,M$ es idéntica para todas los planetas en el sistema solar. Cuáles son las condiciones iniciales requeridas para obtener la solución de este problema. Estas condiciones son las responsables de que cada planeta se mueva en una órbita diferente.

Cuestión 2. Considere los parámetros iniciales propios de la órbita de la Tierra: la masa del Sol es 1.99×10^{30} kg., su distancia mínima al Sol, 1.47×10^{8} km., y su periodo orbital (año) es de 365.24 días. ¿Cómo podría calcular a partir de estos datos las condiciones iniciales adecuadas para describir la órbita de la Tierra? (supuesta elíptica, es decir, sin tener en cuenta la presencia de la Luna, Júpiter y Saturno). NOTA: para las alumnos que no sepan calcular esta velocidad, que es muy fácil, pero bueno, puede darse el caso, y para que continúen haciendo el ejercicio les anticipo como respuesta aproximada 3×10^4 m/s.

Cómo representaría gráficamente en Matlab la órbita elíptica de la tierra (una curva en el plano en coordenadas polares). Usando los parámetros apropiados para la Tierra, dibuje su trayectoria elíptica.

Cuestión 3. Escriba el sistema de ecuaciones (1) como un sistema de ecuaciones de primer orden y obtenga su solución mediante el método numérico de Matlab `ode45` que es un método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso de tiempo adaptativo basado en una estimación del error local utilizando una fórmula de Runge-Kutta de quinto orden. Utilice la ayuda para aprender cómo se usa `ode45`.

Cuestión 4. Represente gráficamente la órbita que obtiene para la Tierra. Compare dicha órbita con la que ha representado analíticamente. ¿Coinciden? ¿Se cierra la órbita numérica tras una revolución completa (un año)? ¿Y tras 100 años? ¿Cuál es el error que comete el método numérico en ambos casos? ¿Cuánto tiempo de ordenador y número de operaciones (`flops`) requieren dichas soluciones? Dibuje gráficamente las trayectorias con uno y 100 años por separado.

Cuestión 5. Deduzca un método numérico de Adams-Bashforth (Adams explícito) de tercer orden a partir de la fórmula de integración de Newton-Cotes adecuada. Analice la estabilidad de este método numérico para λh real (h es el paso de tiempo). ¿Cómo ha calculado la solución del polinomio característico? ¿Cómo arrancaría este método numérico? Desarrolle un método de segundo orden (de Adams-Bashforth) que utilizará como arranque de dicho método. Si necesita, a su vez, arranque para este otro método, utilice un método de primer orden (Adams-Bashforth). Aplique el método numérico resultante de todos estos pasos para la solución de las ecuaciones (1) y conteste a la cuestión 4 con el resultado.

Cuestión 6. Deduzca un método (cualquiera) de Runge-Kutta explícito de tercer orden. Analice la estabilidad de este método numérico para λh real. ¿Cómo ha calculado la solución del polinomio característico? ¿Cómo arrancaría este método numérico? Aplique este método numérico para la solución de las ecuaciones (1) y conteste a la cuestión 4 con el resultado.

Cuestión 7. Utilice el método de la cuestión 6 para arrancar el método de la cuestión 5. Compare los resultados que obtiene, si son diferentes, con los que obtuvo en dicha cuestión. ¿Cambian muchos los errores? ¿Qué procedimiento es más preciso? ¿Confirman sus resultados la recomendación de utilizar un método numérico de arranque del mismo orden que el original?

Cuestión 8. Deduzca un método numérico de Adams-Moulton (Adams implícito) de segundo orden. Analice la estabilidad de este método numérico para λh real. ¿Cómo ha calculado la solución del polinomio característico? ¿Cómo arrancaría este método numérico? Si tiene que resolver algún sistema de ecuaciones no lineal para la aplicación de este método, utilice el método de Newton-Raphson para ello. Aplique el método numérico resultante para la solución de las ecuaciones (1) y conteste a la cuestión 4 con el resultado.

Cuestión 9. Deduzca un método numérico de Adams-Moulton (Adams implícito) de tercer orden. Analice la estabilidad de este método numérico para λh real. ¿Cómo ha calculado la solución del polinomio característico? ¿Cómo arrancaría este método numérico? Si tiene que resolver algún sistema de ecuaciones no lineal para la aplicación de este método, utilice el método de Newton-Raphson para ello. Si tiene que utilizar un método para arrancar dicho método numérico, utilice el método de Adams-Moulton que ha desarrollado en al cuestión anterior. Aplique el método numérico resultante para la solución de las ecuaciones (1) y conteste a la cuestión 4 con el resultado.

Cuestión 10. Aplique una técnica tipo corrector-predictor basada en métodos de Adams de tercer orden. Analice la estabilidad de este método numérico para λh real. ¿Cómo ha calculado la solución del polinomio característico? ¿Cómo arrancaría este método numérico? Aplique el método numérico resultante para la solución de las ecuaciones (1) y conteste a la cuestión 4 con el resultado.

Cuestión 11. Compare el error cometido tras un año, y tras 100 años, entre todos los métodos que ha desarrollado. ¿Cuál es el de menor error? ¿Cuál recomendaría para la resolución numérica del problema que tenemos entre manos?

Cuestión 12. En todas las cuestiones anteriores hemos estudiado la estabilidad para λh real, sin embargo, hemos aplicado dichos métodos a un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya estabilidad lineal viene determinada por sus autovalores, que pueden ser complejos. Escriba el sistema de ecuaciones en forma vectorial como $Y'(t) = F(Y(t))$. Calcule los puntos críticos de este sistema, es decir, los puntos $F(Y) = 0$. ¿Cuántos hay? Linealice el sistema alrededor de dichos puntos críticos (aplique Taylor alrededor de ellos en F) y estudie la estabilidad analítica de cada uno de ellos. RECUERDE: para estudiar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se estudia la parte real de todos los autovalores de la matriz del sistema, si son negativas es estable.

Cuestión 13. Para estudiar la estabilidad de un método numérico aplicado a un sistema de ecuaciones diferenciales necesitamos estudiar la estabilidad en el plano λh complejo. Para ello se dibuja en dicho plano el gráfico de estabilidad del método. Si $p_n(\lambda h, r)$ es el polinomio (de grado n) de estabilidad del método, y sus n raíces son $r_i(\lambda h)$, entonces consideremos la función

$$r_s(\lambda h) = \max\{|r_i(\lambda h)| : \lambda h \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El diagrama de estabilidad es la curva $r_s(\lambda h) = 1$ en el plano λh complejo. Para dibujar esta curva en Matlab, lo más fácil es definir una función con la operación anterior (calcular el máximo módulo de todas las raíces del polinomio utilizando `max` de `roots`). Esta función tendrá dos parámetros, la parte real y la imaginaria de λh. Utilizando `contour` se dibujará el contorno en que dicha función vale la unidad. Estudie en la ayuda de Matlab el funcionamiento de la función `contour`.

Desarrolle un código en Matlab para realizar estas operaciones y aplíquelo a todos los métodos numéricos que ha desarrollado en las cuestiones anteriores de esta práctica. Es decir, represente gráficamente sus diagramas de estabilidad en el plano complejo λh.

Cuestión 14. Compare los diagramas de estabilidad que ha obtenido en la cuestión anterior entre sí. Cuál es el método que tiene una región de estabilidad de área mayor. Cómo cambian los diagramas de estabilidad de los métodos de Adams (tanto Bashforth como Moulton) conforme el orden del método crece. Cómo calcularía el valor de λ correspondiente al sistema de ecuaciones (1) a partir de los resultados de la cuestión 12. Para los valores de h que haya utilizado en sus cálculos numéricos y para los valores de λ que se infieren de su análisis, dibuje un asterisco en la posición correspondiente en la gráfica de estabilidad de los diferentes métodos que ha utilizado. Están todos estos puntos en la región de estabilidad. En su defecto, ha notado dicho comportamiento inestable en las soluciones numéricas que ha obtenido. ¿Por qué?

Cuestión 15. Exponga una serie de conclusiones generales en relación a todas las cuestiones que haya realizado de esta práctica. ¿Algún resultado le ha parecido curioso o sorprendente?

CUESTIÓN AL MARGEN: ¿Qué fracción de la trayectoria orbital de la Luna alrededor del Sol es convexa en dirección hacia el Sol?

NOTA: Basta usar que sin la Tierra, la Luna realizaría un órbita circular alrededor del Sol de periodo un año y de radio 1.5×10^{13} cm., y sin el Sol, la Luna realiza una órbita circular alrededor de la Tierra de periodo un mes y de radio 4×10^{10} cm.