Tercera práctica (2do. parcial) Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro 26 de Abril de 1999

Los problemas de la teoría de la lubricación tratan del flujo de un fluido compresible viscoso a través de una región muy delgada.

Supongamos, para simplificar, el flujo de un fluido viscoso entre un rodamiento cilíndrico y una superficie plana. La distribución de presión en el lubricante sólo tiene componente vertical si el cilindro se supone suficiente largo. La presión $p(\phi)$ para un fluido isotérmico, viscoso y compresible satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{d}{d\phi}\left(\frac{p(\phi)}{p_0}\right) = \beta\,\cos^2\phi - \alpha\left(\frac{p_0}{p(\phi)}\right) cos^4\phi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2},$$

donde $x = (2\,R\,h)^{1/2}\,\tan\phi$, R es el radio del cilindro, x es la coordenada horizontal en el plano y h es la distancia más cercana entre el cilindro y el plano, que se da en el punto $x = 0$. Los coeficientes de la ecuación son

$$\alpha = \frac{12\,\mu\,F}{p_0\,\rho_0}\left(\frac{2\,R}{h^5}\right)^{1/2}, \qquad \beta = \frac{6\,\mu\,U}{p_0}\left(\frac{2\,R}{h^3}\right)^{1/2},$$

donde ω es la velocidad angular del cilindro, $U = R\,\omega$, μ es el coeficiente de viscosidad del lubricante, p_0 y ρ_0 son la presión y densidad del lubricante para $|x| = \infty$, y F es el flujo de masa del lubricante a través de la región $x = 0$ por unidad de longitud del cilindro. Hemos asumido que

$$p(-\pi/2) = p(\pi/2) = p_0,$$

de tal forma que el lubricante es forzado a moverse sólo por la rotación del cilindro y no por ningún gradiente de presión externo.

En general, β y p_0 son valores conocidos, y se requiere encontrar la distribución de presión $p(\phi)$ y el flujo de masa α tal que el se cumpla el problema de valores en el contorno definido por las ecuaciones anteriores.

Este problema se puede ver como un problema no lineal de valores propios, para el que se pueden obtener soluciones aproximadas para $\beta \ll 1$ y $\beta \gg 1$, aunque para β general se requieren métodos numéricos.

Adimensionalizando las variables

$$p_1 = p(0), \qquad \theta = \phi - \frac{\pi}{2}, \qquad y(\theta) = \frac{p(\phi)}{p_0}, \qquad \epsilon = \frac{p_1}{p_0\,\beta}, \qquad \lambda = \frac{p_1\,\alpha}{p_0\,\beta},$$

y extendiendo periódicamente la solución con periodo π, tomando $0 \leq \phi \leq \pi$, el problema diferencial se escribe

$$\epsilon \frac{dy}{d\theta} = \sin^2\theta - \lambda \frac{\sin^4\theta}{y}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$y(\pi/2) = y(-\pi/2) = 1.$$

Para resolver este problema vamos a utilizar la técnica de shooting (disparo) y escribiremos

$$\epsilon \frac{du}{d\theta} = \sin^2\theta - \lambda \frac{\sin^4\theta}{u}, \qquad u(\frac{\pi}{2}) = 1, \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Si $u(\lambda,\theta)$ es la solución de este problema para un valor fijo de ϵ, podemos considerar $\lambda = \lambda(\epsilon)$ de tal forma que

$$\phi(\lambda) = u(\lambda, -\pi/2) - 1 = 0,$$

y entonces $y(\theta) = u(\lambda,\theta)$ es una solución de la ecuación (1) para ϵ, $\lambda(\epsilon)$.

Dado un valor inicial de λ_0 solución de $\phi(\lambda) = 0$, definimos la secuencia del método de Newton

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{\phi(\lambda_n)}{d\phi(\lambda_n)/d\lambda}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Para calcular la derivada de ϕ escribiremos una ecuación diferencial para ella. Si la solución $u(\lambda,\theta)$ de la ecuación (1) es continuamente diferenciable con respecto a λ, entonces con

$$v(\lambda,\theta) = \frac{\partial u(\lambda,\theta)}{\partial\lambda},$$

obtenemos el problema

$$\epsilon \frac{dv}{d\theta} = \left(\frac{\lambda\, v}{u} - 1\right) \frac{\sin^4\theta}{u}, \qquad v(\pi/2) = 0. \tag{2}$$

De esta forma, ahora tenemos

$$\frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} = v(\lambda, -\pi/2),$$

y las iteraciones del método de Newton son

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{1 - u(\lambda_n, -\pi/2)}{v(\lambda_n, -\pi/2)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Para la resolución numérica de nuestros problemas utilizaremos la malla

$$\theta_j = \pi/2 - j\,\Delta\theta,$$

donde $\Delta\theta$ es el paso de la malla. Las ecuaciones (1) y (2) las resolveremos mediante un método predictor-corrector de Adams-Bashforth de cuarto orden (visto en clase). Para arrancar dicho método, las primeras iteraciones las calcularemos mediante el método de Runge-Kutta explícito de cuarto orden también visto en clase.

1. Desarrolle el método numérico descrito para la resolución de las ecuaciones diferenciales y la determinación del autovalor λ. ¿Qué condición de parada ha aplicado al método de Newton y por qué?

2. Represente gráficamente la solución $y(\theta)$ obtenida para los valores de $\epsilon \in \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/9, 1/10\}$. Cuánto vale $\lambda(\epsilon)$ en dichos casos.

3. Conforme ϵ decrece, el paso de la malla $\Delta\theta$ también debe decrecer. Para un ϵ dado, cómo determinaría numéricamente el valor adecuado de $\Delta\theta$.

4. Para $\epsilon \ll 1$ un desarrollo asintótico determina que

$$\lambda(\epsilon) 1 + 2\,\epsilon^2 - 16\,\epsilon^4 + O(\epsilon^5).$$

   Determine el valor numérico de λ para $\epsilon \in \{1/5, 1/10, 1/20, 1/100$ y compárelo con el valor obtenido mediante la expresión asintótica. Ello le permitirá verificar, para ϵ pequeño, su método numérico.