Quinta práctica voluntaria — Técnicas Numéricas
Profesor Francisco R. Villatoro — 5 de Abril de 2000

El objetivo de esta práctica es estudiar el algoritmo de Montecarlo de integración numérica.

El método de Montecarlo es un método numérico para resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. Fue desarrollado por el grupo de John von Neumann tras la segunda guerra mundial y fue publicado por Metropolis y Ulam en 1949, "The Monte Carlo method".

Sea $g(x)$ una función definida en el intervalo $a < x < b$. Vamos a calcular la integral definida

$$I = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Tomemos una variable aleatoria ξ, definida en (a,b), con función de densidad de probabilidad $p(x)$, es decir, tal que

$$\int_a^b p(x)\,dx = 1, \qquad p(x) > 0, \quad x \in (a,b).$$

Se denomina esperanza matemática de una función $f(\xi)$ a la integral

$$E[f(\xi)] = \int_a^b f(x)p(x)\,dx.$$

De esta forma podemos calcular la integral definida de $g(x)$ usando la esperanza de la variable aleatoria

$$\eta = \frac{g(\xi)}{p(\xi)},$$

de tal forma que

$$E[\eta] = \int_a^b \frac{g(x)}{p(x)}\,p(x)\,dx = I.$$

Recordemos de Estadística de 2do. curso el teorema de Chebyshev y el teorema central del límite. Sean N variables aleatorias $\xi_1, \ldots, \xi_N$ con la misma distribución de probabilidad que ξ, para N suficientemente grande, la variable aleatoria

$$\Sigma_N = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N,$$

es una distribución aproximadamente normal con media $\mu_\Sigma = N\,E[\xi] = N\,\mu_\xi$ y desviación típica $\sigma_\Sigma^2 = N\,E[(\xi - E[\xi])^2] = N\,\sigma_\xi^2$, y además, por el teorema de Chebyshev, la probabilidad

$$\mathcal{P}(N\mu_\xi - 3\sigma_\xi\sqrt{N} < \Sigma_N < N\mu_\xi + 3\sigma_\xi\sqrt{N}) \approx 0{,}997,$$

de donde se deduce fácilmente que

$$\mathcal{P}(\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j - \mu_\xi\right| < \frac{3\sigma_\xi}{\sqrt{N}}) \approx 0{,}997.$$

De esta forma, escogiendo N valores ξ_j obtenemos que

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(\xi_j)}{p(\xi_j)} \approx I,$$

y con elevada probabilidad el error de aproximación es inferior a

$$\frac{3\sigma_\xi}{\sqrt{N}},$$

que podemos reducir tanto como queramos aumentando N. En la práctica, esta cota es demasiado pesimista, y suele usarse en su lugar

$$|ERR| \approx= \frac{0{,}675\sigma_\xi}{\sqrt{N}},$$

denominado error probable.

1. Minimizando la desviación típica del error de integración de Montecarlo demuestra que la función densidad de probabilidad $p(x)$ óptima es $|g(x)|$. Normalmente, usaremos $p \approx |g|$.

2. Calcula el valor exacto de la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx.$$

   a) Toma una variable aleatoria ξ distribuida uniformemente en el intervalo $(0, \pi/2)$. ¿Cuál es su función densidad de probabilidad en dicho intervalo? NOTA: $p(x) = \text{const.}$. Suponiendo que la función `rand` de Matlab da una variable uniformemente distribuida en el intervalo $(0,1)$, ¿cómo calcularías valores aleatorios de la variable ξ?. ¿Cómo calcularías la integral del seno?

Escriba un programa en Matlab que calcule la integral del seno y presenta una gráfica de los valores de la integral aproximada en función del número de puntos N (para `N=10:10:100`) para el método de Montecarlo utilizando como muestras las generadas por ξ. Calcule y represente gráficamente el error probable estimado y compárelo con el verdadero.

b) Sea una variable aleatoria ξ con función densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$ definidas en un intervalo (a,b)

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy, \qquad f(x) = F'(x),$$

entonces la probabilidad

$$\mathcal{P}(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(y)\,dy.$$

Demuestre que la función $F(\xi)$ se distribuye como una variable aleatoria uniforme en $[0,1]$. Demuestre que para escoger valores aleatorios de ξ utilizando una distribución uniforme γ, basta resolver la ecuación $F(\xi) = \gamma$.

c) Sea una variable aleatoria ξ con función de densidad lineal en el intervalo $(0,\pi/2)$. ¿Cuál es su función de densidad? ¿Y su función de distribución? ¿Cómo calcularía valores aleatorios de ξ suponiendo que la función `rand` de Matlab da una variable uniformemente distribuida en $[0,1]$?

Escriba un programa en Matlab que calcule la integral del seno y presenta una gráfica de los valores de la integral aproximada en función del número de puntos N (para `N=10:10:100`) para el método de Montecarlo utilizando como muestras las generadas por ξ. Calcule y represente gráficamente el error probable estimado y compárelo con el verdadero.

3. Ahora vamos a calcular los valores de la integral elíptica de primera clase

$$F(\phi, m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m\sin^2\theta}} = \int_0^{\sin\phi} \frac{dt}{\sqrt{(1-mt^2)(1-t^2)}}.$$

Note que Matlab le permite calcular dicha integral con la función

```
 ELLIPJ Jacobi elliptic functions:
  [Sn,Cn,Dn] = ELLIPJ(U,M) returns the values of the Jacobi
  elliptic functions SN, CN and DN, evaluated for corresponding
  elements of argument U and parameter M. The arrays U and M must
  be the same size (or either can be scalar).  As currently
  implemented, M is limited to 0 <= M <= 1.
```

Nuestra F corresponde a Sn, es decir, $F(\phi, m) \equiv ELLIPJ(\phi, m)$.

Defina dos variables aleatorias Φ y μ asociadas a los valores de los argumentos de F, es decir, a ϕ y m. ¿En qué intervalos están definidas? Construya sus funciones densidad y distribución si las considera como variables aleatorias uniformes (constantes) y lineales.

Explique cómo podría aplicar el método de Montecarlo para resolver una integral doble. Explique la aplicación de dicho método a la función $F(\phi, m)$.

Desarrolle un programa Matlab que calcule la integral elíptica $F(\phi, m)$ mediante integración numérica mediante el algoritmo de Montecarlo, utilizando (a) dos variables aleatorias constantes, y (b) dos variables aleatorias lineales.